ETUDE DU SMILE DE VOLATILITÉ

Pedram Rostami

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 3

I- LE PRICING DES OPTIONS.. 4

1- LA FORMULE DE BLACK AND SCHOLES...................................4

2- LES GRECQUES :...6
a- Le Delta 6
b- Le Gamma...9
c- Le Véga..11

3- ADAPTATION AUX OPTIONS DE CHANGES : LE MODELE DE GARMAN & KOHLHAGEN............13
a- Le Delta..14
b- Le Gamma...15
c- Le Véga..15

4- LES LIMITES DE CES MODELES...16

II- LA VOLATILITE 18

1- LES DIFFERENTES VOLATILITES. 18
a- La volatilité historique. 18
b- La volatilité implicite 19
c- La volatilité anticipée..19
d- En résumé...20

2- LE SMILE DE VOLATILITE. 21
a- La volatilité en fonction du strike. 22
b- La volatilité en fonction du temps. 24

3- COMMENT FORMER LE SMILE DE VOLATILITE ?....................26
a- L'effet Risk Reversal 26
b- L'effet Strangle...27

III- LA VOLATILITE COMME STRATEGIE DE TRADING ET GESTION DE BOOK D'OPTION....30

1- LE STRADDLE. 30

2- LE STRANGLE. 31

3- PRINCIPE DE GESTION D'UN BOOK D'OPTION.......................... 32

4- COUVERTURE EN DELTA NEUTRE ET GAMMA POSITIF. 33

5- GESTION DU THÊTA ET DU GAMMA. 34

6- L'ERREUR DE COUVERTURE. ………………………………................................. 37

CONCLUSION : 39

BIBLIOGRAPHIE : 40

ANNEXES : 41

INTRODUCTION :

La volatilité est devenue l'un des concepts les plus importants dans le monde des options. A tel point qu'on ne parle plus aujourd'hui de trader option mais de trader de volatilité.

Tout à commencé avec le modèle de Black & Scholes qui suppose que la distribution de probabilité de l'actif sous-jacent est log-normale à toute date. Or, nous avons pu constater que les variations peuvent être bien plus importantes que ce que prévoit Black & Scholes.

C'est justement à la suite du krach de 1987 que fut introduit la notion de smile de volatilité pour justement pouvoir expliquer ces sauts qui ont pu atteindre 20% et plus sur une seule séance.

Les traders supposent maintenant que les queues de cette distribution de probabilités sont asymétriques et plus épaisses par rapport à la loi log-normale.

Cette étude a pour but de revenir sur ces différentes notions à fin de mieux comprendre
la notion de volatilité et l'impact du smile.

Tout au long de cette étude nous allons utiliser des données de marchés dans le but de joindre la partie théorique au monde réel des marchés financiers.

Afin de comprendre ce phénomène de smile, nous allons, dans un premier temps, revenir rapidement sur le pricing des options et des sensibilités à fin de comprendre quelles sont les limites imposées par ces modèles.

Nous allons ensuite introduire la notion de smile de volatilité et essayer de comprendre comment les opérateurs utilisent ce smile.

La troisième partie tentera d'expliquer les grandes lignes du trading de volatilité et de la gestion d'un book d'options.

I- Le pricing des options.

1- La formule de Black and Scholes :

Le modèle de Black-Scholes (du nom de Fischer Black et Myron Scholes) d'évaluation d'option est un modèle utilisé en mathématiques financières afin d'estimer en théorie la valeur d'une option financière, du type option européenne.

Il fut publié en 1973. L'intuition fondamentale de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.
Leur découverte eut très rapidement une influence considérable, et des déclinaisons de leur modèle sont utilisées dans tous les compartiments des marchés financiers.

La formule de Black & Scholes est connue et est dans tous les ouvrages de finance.
Cependant, il est intéressant de comprendre d'où vient cette formule, quelles hypothèses sont posées en amonts et comment arrive-ton à cette formule.

<u>Essayons de démontrer cette formule :</u>

Soit un Call $C(t, S, T, K)\ t$ à la date t, sur l'actif St, de maturité T et de Strike K.

Alors, $C(t, S, T, K)\ t = (St - K)^+$

St suit un mouvement Brownien standard géométrique :

$$dS_t = S_t \mu\, dt + S_t \sigma\, dW_t$$

(μ (constante) est le taux de dérive (drift) du prix de l'action, σ (constante) est la volatilité du prix de l'action)

$\left(\dfrac{C(t,S_t,T,K)}{S_0}\right)_{t>0}$ est une martingale sous Q.

Et $C(t,S_t,T,K) = E_t^Q\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+\right] = E_t^Q\left[e^{-r(T-t)}\left(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} - K\right)^+\right]$

avec $Z \approx N(0,1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_D S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}.x-\frac{x^2}{2}} .dx - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_D e^{-\frac{x^2}{2}} \text{dx}$$

Où D = $\left\{ x \in R / S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}.x} \geq K \right\} = \left[-d_2, +\infty\right]$ avec $d_2 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Nous avons donc (D= d_2):

$$C(t, S_t, T, K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}.x-\frac{x^2}{2}} .dx - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} .dx$$

$$= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+d2} e^{-\frac{x^2}{2}} .dx$$

Avec

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

En posant : $N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} .dt$

On obtient alors :

$$\boxed{C(t, S_t, T, K) = S_t \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K . N(d_2)}$$

On obtient donc la fonction de Black & Scholes (avec t=0) :

$$\textit{Prime}_{CALL} = S_0 . N(d_1) - K.e^{-r.T} . N(d_2)$$

$$\textit{Prime}_{PUT} = - S_0 . N(-d_1) + K.e^{-r.T} . N(-d_2)$$

Avec:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma.\sqrt{T}} \qquad \textit{et} \qquad d_2 = d_1 - \sigma.\sqrt{T}$$

- *S0* la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance (maturité, exprimé en années)
- K le prix d'exercice fixé par l'option

- r le taux d'intérêt sans risque
- σ la volatilité du prix de l'action
- N (d1) Représente une loi normale cumulée centrée réduite (moy = 0 , écart-type = 1)

2- Les grecques :

Nous ne pouvons pas parler des options sans parler des lettres grecques.
Les Grecques sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité de la prime d'une option par rapport à un facteur donné (le cours du sous jacent, le temps, la volatilité).

a- Le delta

Le delta mesure la sensibilité de la prime d'une option par rapport au cours du sous-jacent.
Il est définit comme la variation du prix de l'option pour une variation de 1% du cours du sous-jacent.
La valeur du delta :
Le delta est la dérivé du prix de l'option par rapport au sous-jacent.

On a donc :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial S_t} C(t, S_t, T, K) = \frac{\partial}{\partial S_t}\left\{S_t \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K.N(d_2)\right\}$$

$$= N(d_1) + \left\{S_t \cdot N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t}\right\}$$

Or, $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Donc : $\dfrac{\partial d_1}{\partial S_t} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \dfrac{1}{K} \cdot \dfrac{K}{S_t} = \dfrac{\partial d_2}{\partial S_t}$

Mais $S_t \cdot N'(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2) = S_t \cdot N'\left(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}\right) - e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2)$

$$= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(d_2+\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}} - \frac{K.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$$

Et $S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot d_2} = \mathrm{K} = S_t \cdot e^{\frac{\left(d_2+\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}} \cdot e^{+\frac{d_2^2}{2}} \cdot e^{r(T-t)}$

Donc, $S_t \cdot N'(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(d_2+\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} - \frac{K.e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} = 0$

Finalement ;

$$\boxed{\Delta = N(d_1)}$$

De la même façon, on obtient le delta du Put $P(t, S, T, K)$:

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial}{\partial S_t} P(t, S_t, T, K) = N(d_1) - 1}$$

<u>Graphique du delta pour un Call et pour un put:</u>

<u>Données :</u>

Option : Call

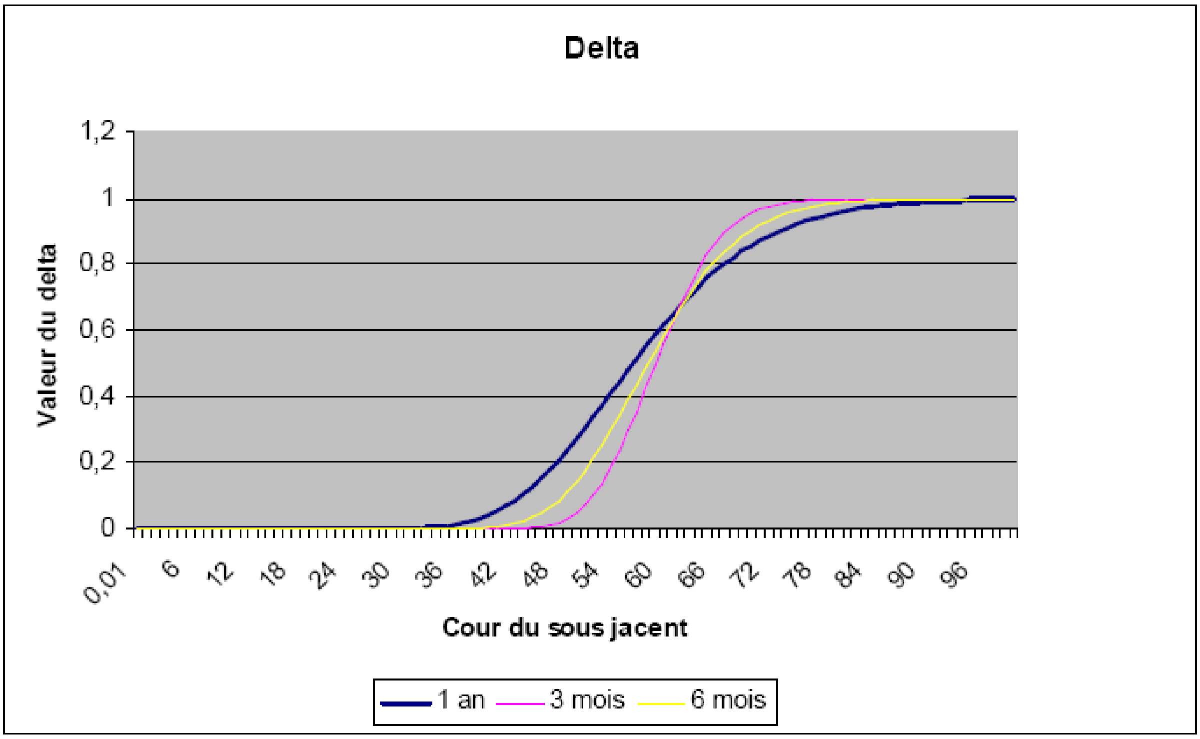
Strike : 60€

Maturité : 1 an

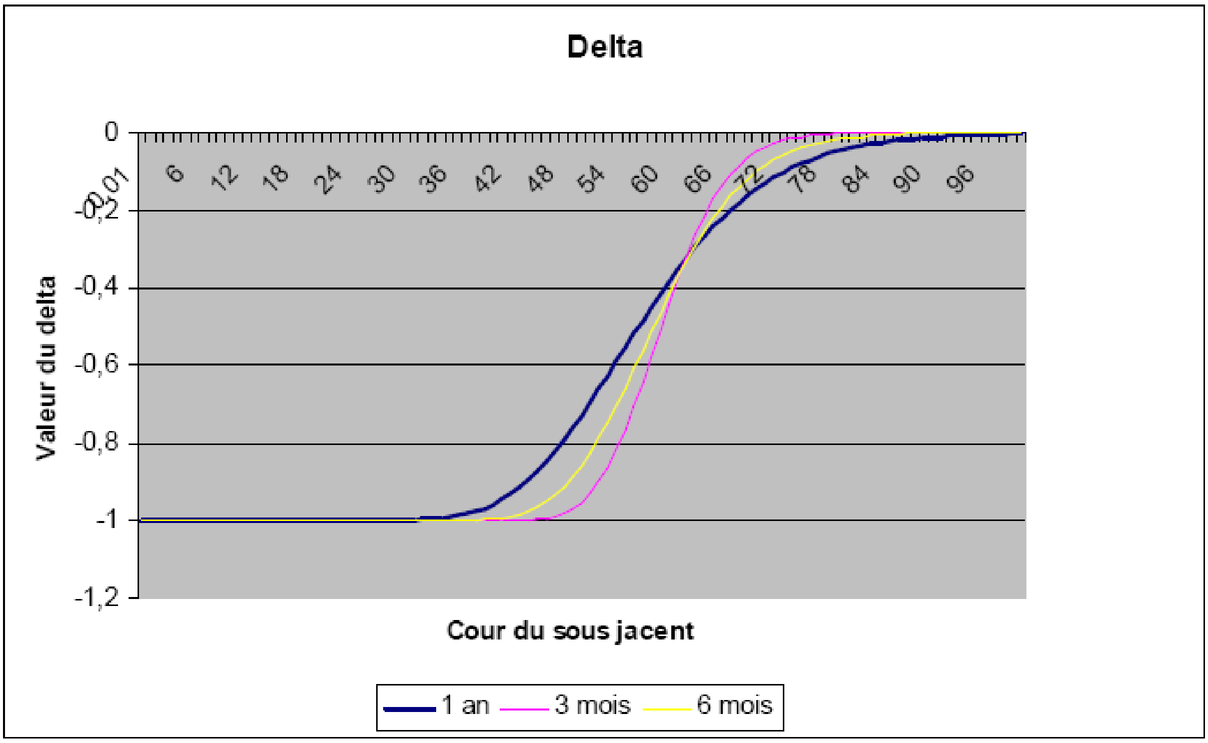
Volatilité : 20%

Taux : 4%

Graphique 1 : La valeur du delta d'un Call en fonction du sous-jacent :



Graphique 2 : La valeur du delta d'un Put en fonction du sous-jacent :



A la vue de ces graphiques, nous pouvons énoncer quelques généralités :

- Le delta d'un call est toujours positif et varie de 0 à 1,

- Le delta d'un put est toujours négatif et varie de -1 à 0,

- Le delta d'une option très dans la monnaie (deep in the money) est proche de 1 (en valeur absolue). Ainsi, toute variation du sous-jacent est répercutée intégralement sur la prime de l'option.

- Au contraire, le delta d'une option très hors de la monnaie (very deep out of the money) est proche de 0. Ainsi, toute variation du cours du sous jacent a un impact négligeable sur le prix de l'option.

- $\Delta_{CALL} = \Delta_{PUT} + 1$

b- **Le Gamma**

Le delta n'étant pas une mesure stable, nous avons besoin du Gamma.
Celui-ci mesure la sensibilité du delta aux variations de l'actif sous-jacent.

La valeur du Gamma :
Le Gamma est la dérivé du delta. Il représente donc la dérivé seconde du prix de l'option par rapport au sous-jacent.

On a donc :

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial^2 S_t} C(t, S_t, T, K) = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} . N^{'}(d_1)$$

Or, $\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} . \frac{1}{K} . \frac{K}{S_t} = \frac{1}{S_t \sigma\sqrt{T-t}}$

Finalement ;

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_t.\sigma\sqrt{T-t}}$$

Nous pouvons nous rendre compte que : $\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT}$

Graphique du Gamma pour un Call et pour un put:

Données :

Option : Call

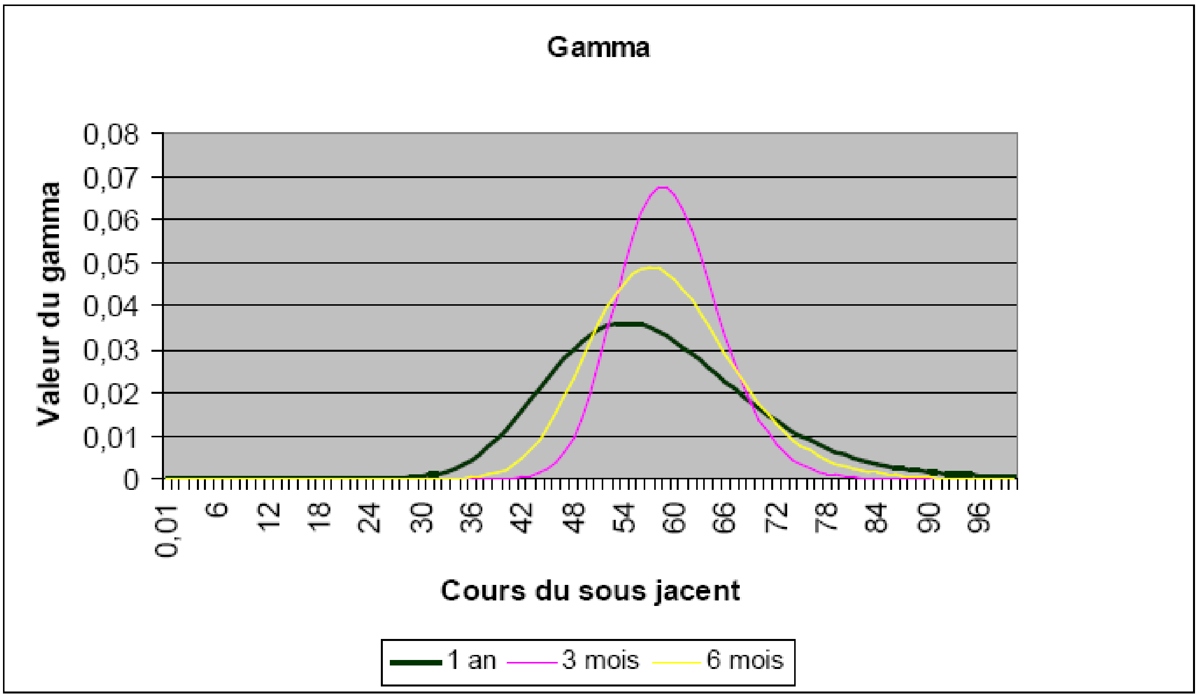
Strike : 60€

Maturité : 1 an

Volatilité : 20%

Taux : 4%

Graphique 3 : La valeur du Gamma en fonction du sous-jacent :



Quelques généralités :

• Le gamma d'une option acheté est positif,

• Le gamma d'une option vendue est négatif,

• Le gamma est maximal pour les options à la monnaie (ATM & ATMF)

(voir graphique ci-dessus),

• Un gamma faible indique que les variations constatées sur le sous jacent ont peu d'effets sur le delta de l'option.

• A l'inverse, un gamma élevé indique que les variations du sous jacent agissent fortement sur le delta.

• Une bonne stratégie serait d'acheter le petit gamma et vendre le gros gamma.

c- **Le Véga**

La valeur du Véga :

Mathématiquement, il s'agit de la dérivé du prix de l'option par rapport à la volatilité.

$$\vartheta = \frac{\partial}{\partial \sigma} C(t, S_t, T, K) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{S_t . N(d_1) - e^{-r(T-t)} . K . N(d_2)\right\}$$

$$= S_t . N^{'}(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)} . K . N^{'}(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

Or, $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ donc $\dfrac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \dfrac{\sqrt{T-t}}{2} = -\dfrac{\partial d_2}{\partial \sigma}$

De la même manière que pour le delta :

$$S_t \cdot N'(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2) = 0 \Leftrightarrow S_t \cdot N'(d_1) = e^{-r(T-t)} \cdot K.N'(d_2)$$

On obtient alors ;

$$\vartheta = S_t \cdot N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - S_t \cdot K.N'(d_1)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = 2S_t \cdot N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$$

$$\boxed{\vartheta = S_t \sqrt{T-t}\, N'(d_1)}$$

<u>Graphique du Véga pour un Call et pour un put:</u>

<u>Données :</u>

Option : Call

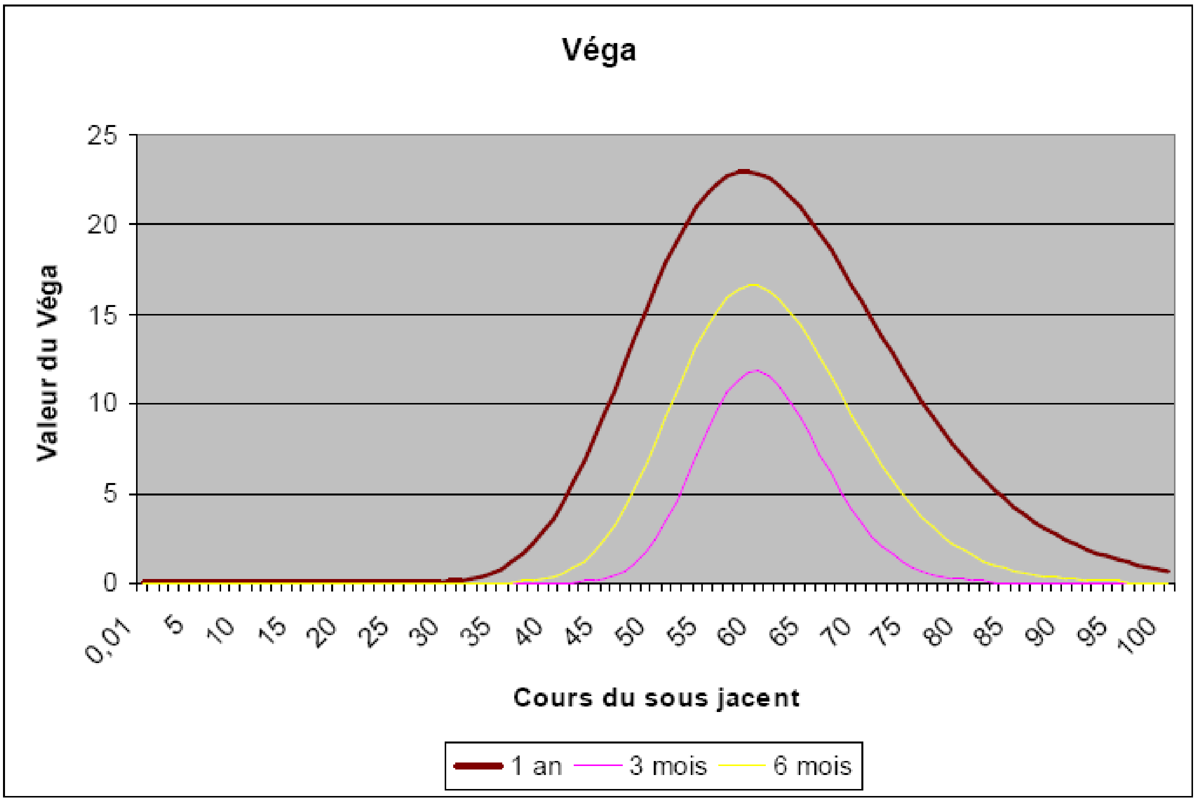
Strike : 60€

Maturité : 1 an

Volatilité : 20%

Taux : 4%

<u>Graphique 4 : La valeur du Véga en fonction du sous-jacent :</u>



Quelques généralités :

• La détermination des primes d'options est effectuée à partir des volatilités implicites.

• Un véga positif correspond à une stratégie gagnante quand la volatilité du titre (le sous jacent) augmente (Call).

• Un véga négatif correspond à une stratégie perdante quand la volatilité du titre (le sous jacent) baisse (Call).

3- Adaptation de B&S aux options de changes : Le modèle de Garman & Kohlhagen :

La formule de Garman & Kohlhagen est une extension directe de la formule de Black & Scholes pour les options Forex.

Le principe est d'introduire un taux d'intérêt étranger.

En suivant une démonstration analogue de celle de Black & Scholes, nous obtenons le résultat suivant :

$$C(t,S_t,T,K) = S_t \cdot e^{-r_F(T-t)} \cdot N(d_1) - e^{-r_D(T-t)} \cdot K.N(d_2)$$

$$P(t,S_t,T,K) = -S_t \cdot e^{-r_F(T-t)} \cdot N(-d_1) + e^{-r_D(T-t)} \cdot K.N(-d_2)$$

Avec $$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left((r_D - r_F) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

- *S0* la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance (maturité exprimé en années)
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- rF le taux d'intérêt étranger
- rD le taux d'intérêt domestique
- σ la volatilité du prix de l'action
- N (d1) Représente une loi normale cumulée centrée réduite (moy = 0 , écart-type = 1)

Cependant, il faut noter que depuis l'apparition de l'Euro, cette formule n'est plus tout à fait exacte. En effet, l'Euro étant coté au certain face à toutes les autres devises, si nous voulons utiliser cette formule pour pricer des options sur de l'EUR/USD, il faut prendre comme taux étranger, le taux de l'Euro et comme taux domestique celui du dollar.

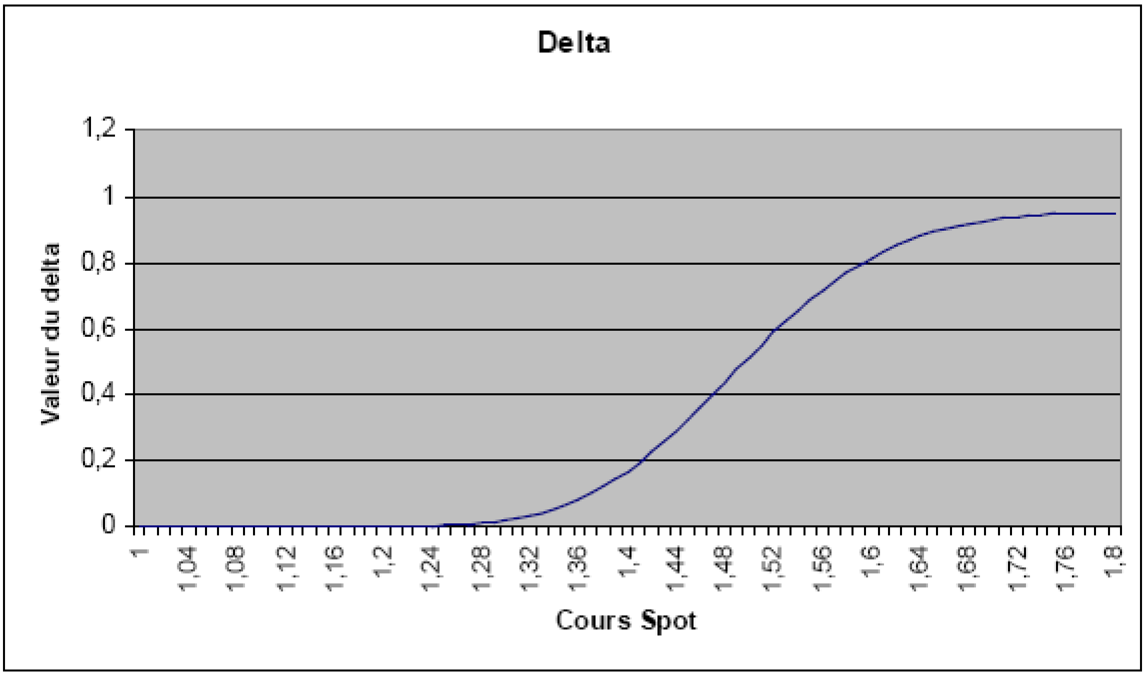
Donc : rF : Taux euro
rD : Taux dollar

De la même façon que pour Black and Scholes, nous pouvons démontrer la formule des principales lettres grecques.

a- **Le delta**

$$\boxed{\Delta = e^{-r_F(T-t)}.N(d_1)}$$

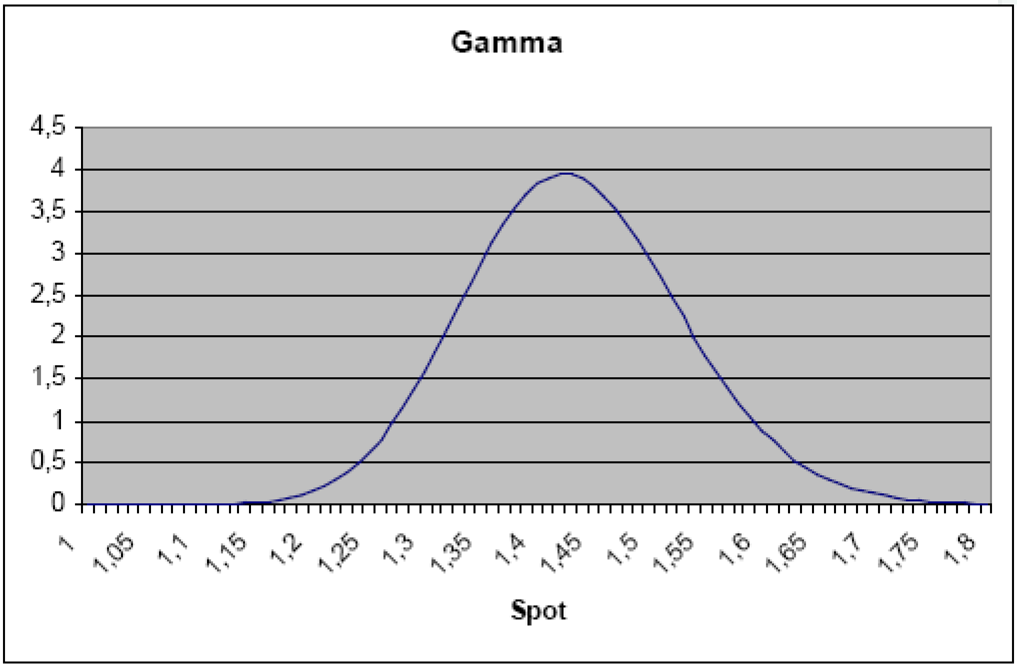
Graphique 5 : La valeur du delta d'un Call EUR/USD en fonction du sous-jacent :



b- **Le Gamma**

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_t.\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{-r_F(T-t)}$$

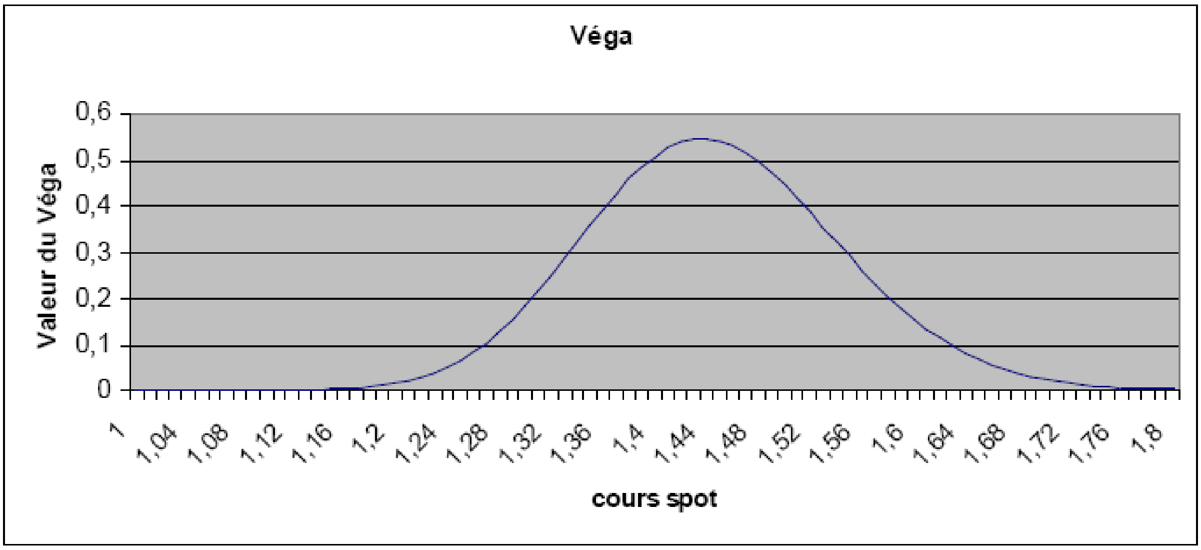
Graphique 6 : La valeur du gamma d'un Call EUR/USD en fonction du sous-jacent :



c- **Le Véga**

$$\vartheta = S_t\sqrt{T-t}\,N'(d_1).e^{-r_F(T-t)}$$

Graphique 7: La valeur du véga d'un Call EUR/USD en fonction du sous-jacent :



4- Les limites de ces modèles :

La formule de Black-Scholes peut être démontrée rigoureusement si un certain nombre de conditions sont établies. On parle alors de modèle de Black-Scholes, ou on dit qu'on est dans le cas Black-Scholes.

Les marchés financiers correspondent assez bien à ce modèle, mais pas exactement bien sûr.
Il y a donc un certain écart entre ce modèle et la réalité, qui peut devenir important quand les marchés sont agités avec de fréquentes discontinuités de cours.

Les conditions du modèle sont les suivantes :

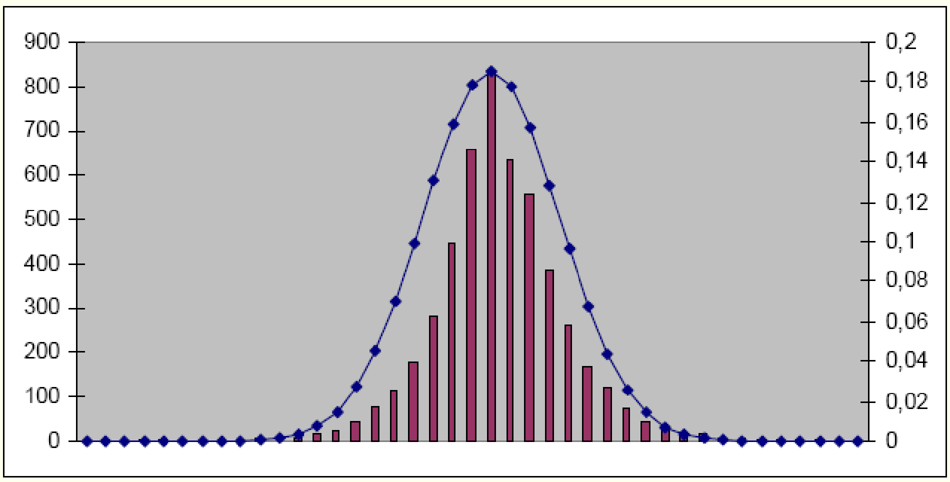
1. Les cours du sous jacent suivent une "marche aléatoire".
Cela signifie que les variations de cours à très court terme suivent une distribution gaussienne (normale). Cette hypothèse implique que les cours futurs suivent un modèle log-normal.
2. la volatilité est connue à l'avance et est constante ;
3. il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
4. les ventes à découvert sont autorisées (où on emprunte une certaine quantité du sous-jacent pour la vendre) ;
5. le taux d'intérêt est connu à l'avance et est constant ;
6. l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance

Cependant, ces hypothèses ne sont pas vérifiées sur les marchés.

Prenons la première hypothèse :

Le modèle de comportement des cours du sous jacent utilisé par Black et Scholes suppose que, dans un court intervalle de temps, les variations en pourcentage des cours des actions sont distribuées selon une loi normale :

Graphique 8: Exemple de loi normale



Si les variations des cours du sous jacent suivent une loi normale, alors, cela implique que les cours suivent une loi log-normale.

Contrairement à la distribution normale, la distribution log-normale est dissymétrique et
légèrement décalée par rapport à la moyenne. Ainsi, la moyenne, la médiane et le mode sont tous différents.

Cette modélisation log-normale de l'actif sous jacent est un biais puisque les évènements à chocs ne sont pas pris en compte. Si on tient compte de ces évènements rares, on peut alors montrer que les prix des options incluant ces chocs ont un prix supérieur aux prix des options évaluées par le modèle Black and Scholes.

En effet, la distribution des rendements des actifs financiers se caractérise par un coefficient d'asymétrie différent de zéro, ce qui signifie que la distribution des rendements n'est pas symétrique, et par un coefficient d'aplatissement supérieur à 3, ce qui signifie que notre distribution possède des queues épaisses.

Or, la valeur des options dont le prix d'exercice est éloigné du prix courant de l'actif sous-jacent est particulièrement sensible aux événements rares et, si ces événements sont plus fréquents que ne le suppose une distribution normale, alors le prix des options en dehors de la monnaie et le prix des options dans la monnaie sera plus élevé que ne le prévoit le modèle.

En particulier, la formule de Black & Scholes sous-évalue les options en dehors de la monnaie et dans une moindre mesure, les options dans la monnaie, du fait de l'hypothèse de normalité du rendement de l'actif sous-jacent, combinée à l'hypothèse de volatilité constante.

Voici la forme des différentes courbes de Gauss en fonction de l'intensité de la volatilité :

Graphique 9 : courbes de Gauss en fonction de l'intensité de la volatilité :

Nous voyons donc que ces modèles ne sont pas complètement fiables du notamment à certaines hypothèses non vérifiées. Nous mettons en avant, à travers les faiblesses de ces modèles, un concept très important dans le monde des options, celui de la volatilité.

II- La volatilité.

1- Les différentes volatilités :

Le concept de volatilité est une notion fondamentale qui constitue l'un des principaux outils de gestion de book d'options. Dans la pratique, la cotation d'options s'effectue parfois en indiquant un chiffre de volatilité, plutôt que la valeur de la prime, démontrant l'importance accordé à ce facteur par les market makers. Les opérateurs s'échange alors des anticipations de volatilité.

La volatilité représente la probabilité de l'actif financier à s'éloigner de sa moyenne des rendements journaliers, sur une période donnée. Plus la volatilité est élevé, plus la prime est élevé et inversement. Elle est l'un des principaux facteurs, avec le cours de l'actif sous-jacent, servant à la détermination de la prime.

On peut distinguer trois formes de volatilité :

- La volatilité historique,
- La volatilité implicite,
- La volatilité anticipée.

a- La volatilité historique :

La volatilité historique est fondée sur l'observation des cours passés de l'actif sous-jacent, et calculée par des formules statistiques.
On la définit comme la mesure de l'écart type de la rentabilité de l'actif sur une période élémentaire passée, habituellement ramenée dans une base annuelle.

Afin d'estimer empiriquement la volatilité d'un actif, des relevés de cours périodiques sont nécessaires.

Soit :
n+1 : le nombre d'observation => n : nombres de rendements,
Si : le cours de l'actif en fonction du temps
ui : Les rendements logarithmiques

Posons : $$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

L'estimation σ de l'écart type des *ui* est donnée par la formule :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)^2}$$

En général, on parle de volatilité annualisée. Il faut donc multiplier cet écart type par la raciné carré du nombre de jours d'observation (s'il s'agit d'une observation journalière) ou du nombre de mois ou de semaines.

Exemple pour une observation journalière :
Volatilité historique = $\sigma * \sqrt{252}$(car il y a 252 jours ouvrés dans une année.)

b- **La volatilité implicite :**

La volatilité implicite intervient dans le calcul de l'option à l'aide d'un modèle d'évaluation (Black & Scholes ou autre). On peut la considérer comme l'anticipation actuelle du marché de la volatilité sur la période future jusqu'à l'échéance. Il s'agit donc d'un indicateur permettant de mesurer l'amplitude des variations futures de cours anticipée par le marché.

Elle s'obtient, à partir de la valeur de la prime, en inversant la formule d'évaluation de l'option et par approximation successives. Ainsi, à toute prime est associé un niveau de volatilité implicite.

Les options très dans la monnaie et très en dehors de la monnaie sont peu sensibles aux variations de volatilité.

c- **La volatilité anticipée**

Ce paramètre est un indicateur de la volatilité future du cours de l'actif sous-jacent.
En dépit de recherche sur des modèles mathématiques pointus (modèles de Garch,…), aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu jusqu'à présent pour sa détermination.

Seules les deux premières définitions sont réellement utilisées dans la pratique, pour comparer les prix d'options. Au chiffre de volatilité historique, est associé un prix théorique de l'option.
Cela revient à comparer volatilité historique et volatilité implicite pour déterminer les sur et sous-évaluations des options.

Cependant, aucune formulation mathématique ne permet de lier ces deux volatilités. L'exemple d'un krach, ayant pour conséquence une brutale hausse de la volatilité implicite, met fin à toute querelle de spécialistes sur le sujet.

Ainsi, la volatilité implicite permet de mesurer la « cherté » d'une option.

On distingue :

- La cherté absolue : Comparaison par rapport à la volatilité historique
- La cherté relative : Comparaison des volatilités implicites de différentes séries au sein d'une même classe (option du même type couvrant le même actif)

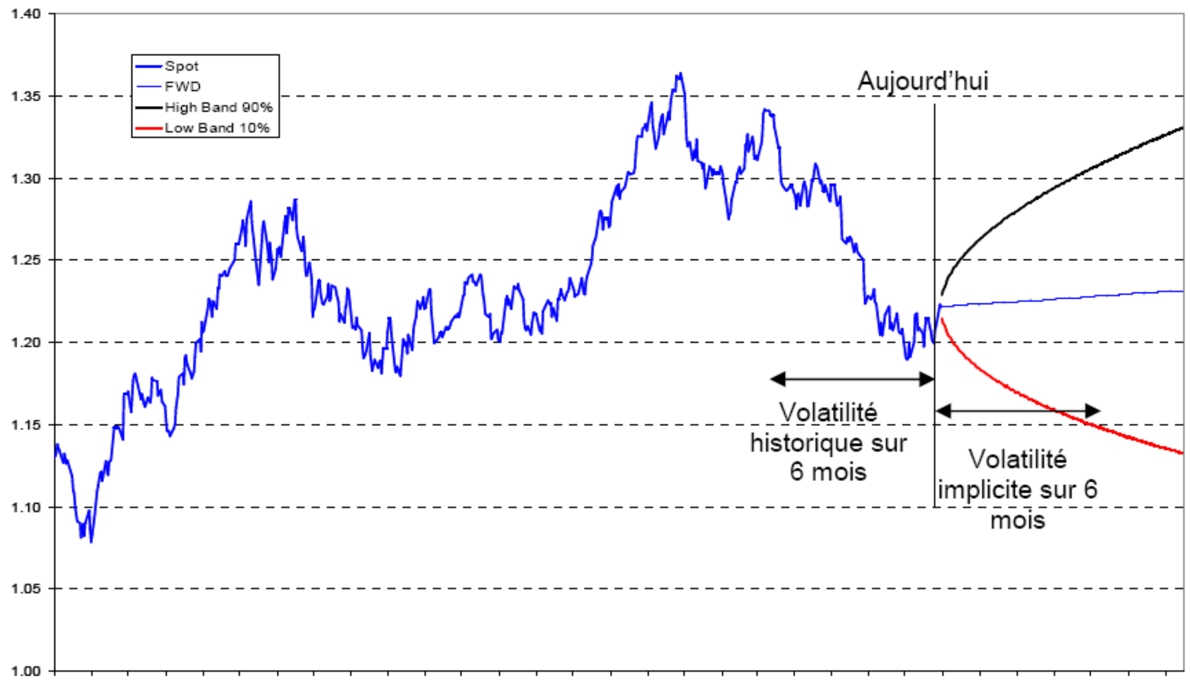
d- En résumé :

La volatilité historique c'est l'écart type des rendements logarithmiques annualisés.

La volatilité réalisée (ou historique) mesure la volatilité passée du sous jacent sur une période donnée.

La volatilité implicite est le prix coté par les market makers pour une option.
C'est la volatilité attendue sur la durée de vie de l'option.

Graphique 10: Volatilité historique et volatilité implicite (EUR/USD) :



2- Le smile de volatilité :

Nous venons de voir les limites de ces modèles et qu'il existe un biais systématique entre le prix théorique, tel qu'il est calculé par la formule de Black et Scholes, et les prix observés sur les marchés optionnels.

Ce biais est généralement attribué à l'hypothèse, très controversée, de log-normalité du cours de l'actif sous-jacent qui implique une volatilité constante. Cette hypothèse conduit à une mauvaise évaluation des options ; en particulier le modèle de Black et Scholes sous-estime les options deep out of the money et deep In the money.

Ces deux éléments sont caractéristiques d'une mauvaise estimation des paramètres de symétrie ("skewness") et d'aplatissement ("kurtosis").

Ainsi, lorsque l'on estime la volatilité implicite pour différents prix d'exercice, on remarque que celle-ci est en forme de « U » : c'est le phénomène connu sous le nom de "smile de volatilité".

Des travaux ont été menés pour vérifier l'hypothèse que le cours du sous jacent suit une loi log-normale ou pas. Cette étude a démontré qu'il existe effectivement des mouvements brutaux et donc des queues de distributions plus épaisses. Cette étude justifie donc l'utilisation par les traders du smile de volatilité

Nous allons poursuivre cette étude en nous recentrant uniquement sur les options de changes.

La première question que nous sommes en droit de nous poser est :
Pourquoi les taux de change ne suivent-ils pas un mouvement brownien géométrique ?

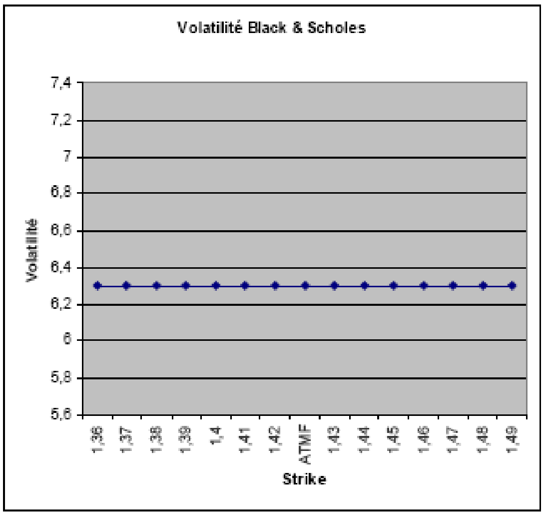
Il y a deux conditions pour que le prix d'un actif suive un tel processus :
1. La volatilité doit être constante
2. Le cours doit varier sans sauts.

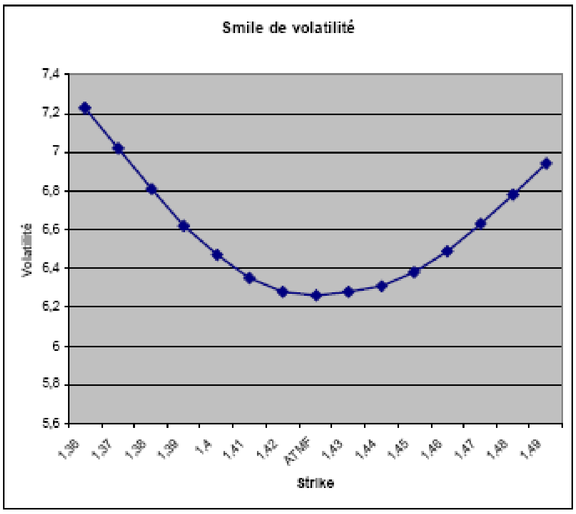
Or, nous avons vu qu'en pratique, aucune de ces deux conditions n'est satisfaite pour les taux de change. La volatilité d'un taux de change est loin d'être constante et les taux de changes font fréquemment l'objet de sauts (interventions des banques centrales).
Cette instabilité de volatilité et ces sauts dans le processus des taux de change conduisent à une augmentation de la probabilité de mouvements extrêmes.

a- **La volatilité en fonction du Strike :**

Voici deux graphiques comparant la volatilité « Black and Scholes » et la volatilité réellement observé sur les marchés (smile de volatilité) en fonction du Strike ;

Graphique 11 : Volatilité constante Black & Scholes vs. Smile de volatilité :





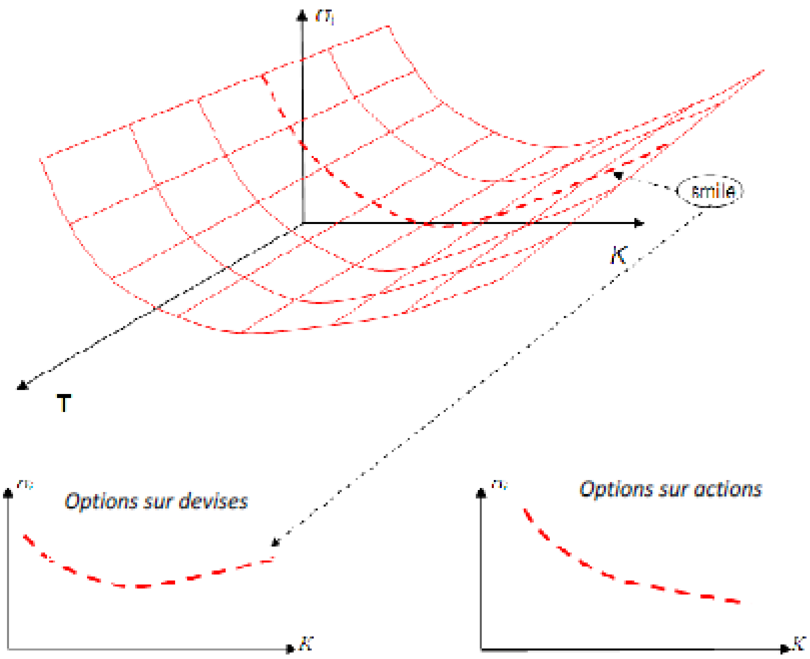
Ces deux graphiques illustrent parfaitement la différence de loi de probabilité utilisés entre le modèle de Black & Scholes et la loi « implicite » utilisé par les opérateurs de marché.

Nous constatons, pour les options de change, que la volatilité est relativement faible à la monnaie (ATMF) et augmente progressivement au fur et à mesure que l'option devient de plus en plus In the money (ITM) ou Out of The money (OTM).

Le smile provient du fait que les distributions de probabilités des options de change ne suivent pas exactement une distribution log-normale.

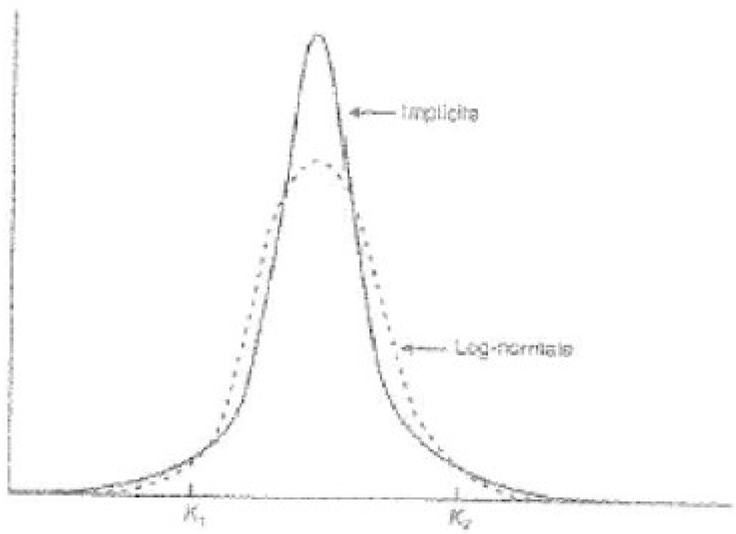
Il existe 2 types de tendance concernant les graphiques : le smile options sur devises, convexe, d'abord décroissant puis croissant et le smile pour options sur actions, convexe, et décroissante sur tous les strikes.

Graphique 12 : Smile de volatilité sur devises vs. Smile de volatilité d'options sur actions :



Voici un graphique représentant la différence entre la loi log-normale et la loi implicite.

Graphique 13 : différence entre la loi log-normale et la loi implicite :



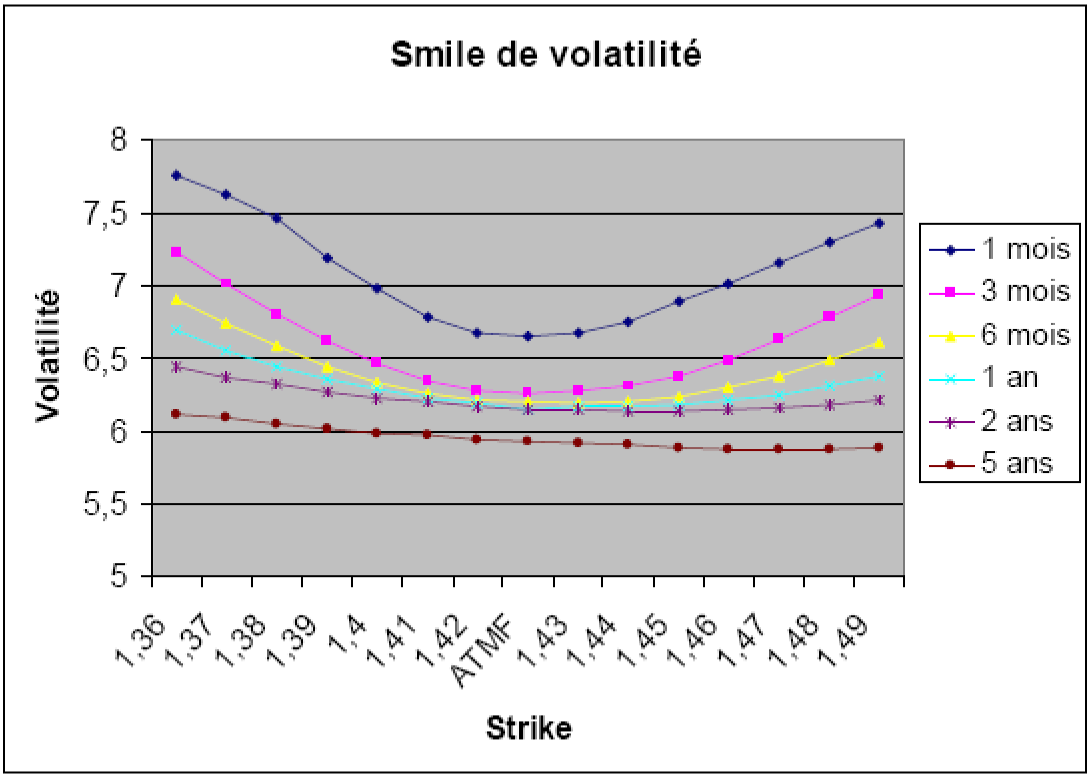
Source : « Options, futures et autres actifs dérivés » ; John Hull

b- La volatilité en fonction du temps :

Nous avons vu que la volatilité varie en fonction du prix d'exercice. Nous allons maintenant voir que la maturité de l'option a également un effet important sur le smile de volatilité.

Pour bien s'en rendre compte, voici un graphique de smiles de volatilité pour différentes maturité pour une même option.

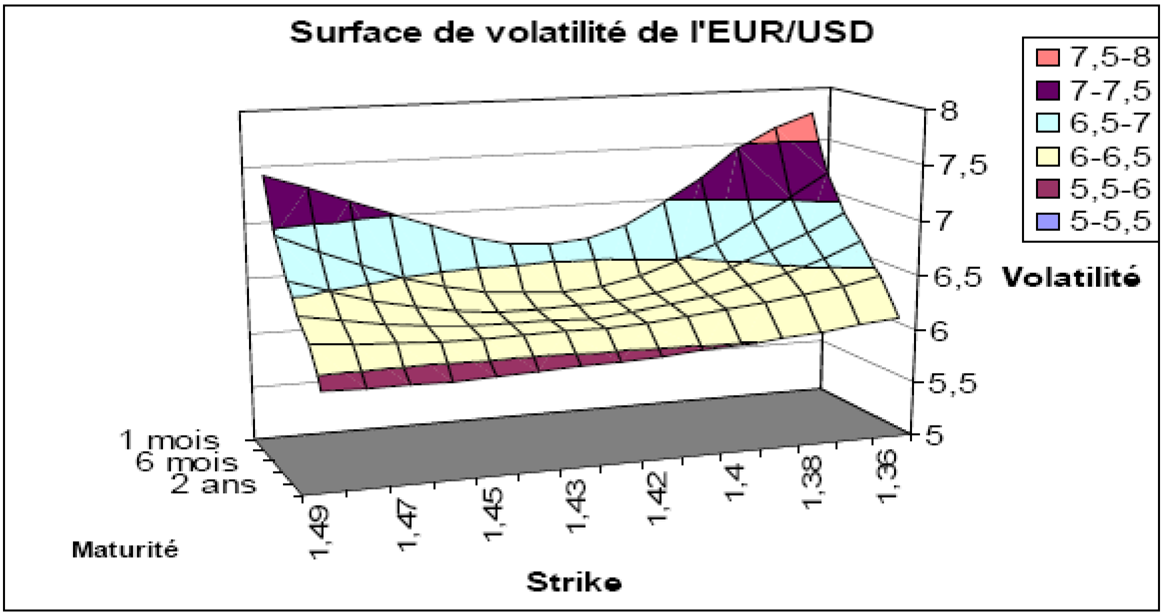
<u>Graphique 14 : Smiles de volatilité pour différentes maturité pour une même option :</u>



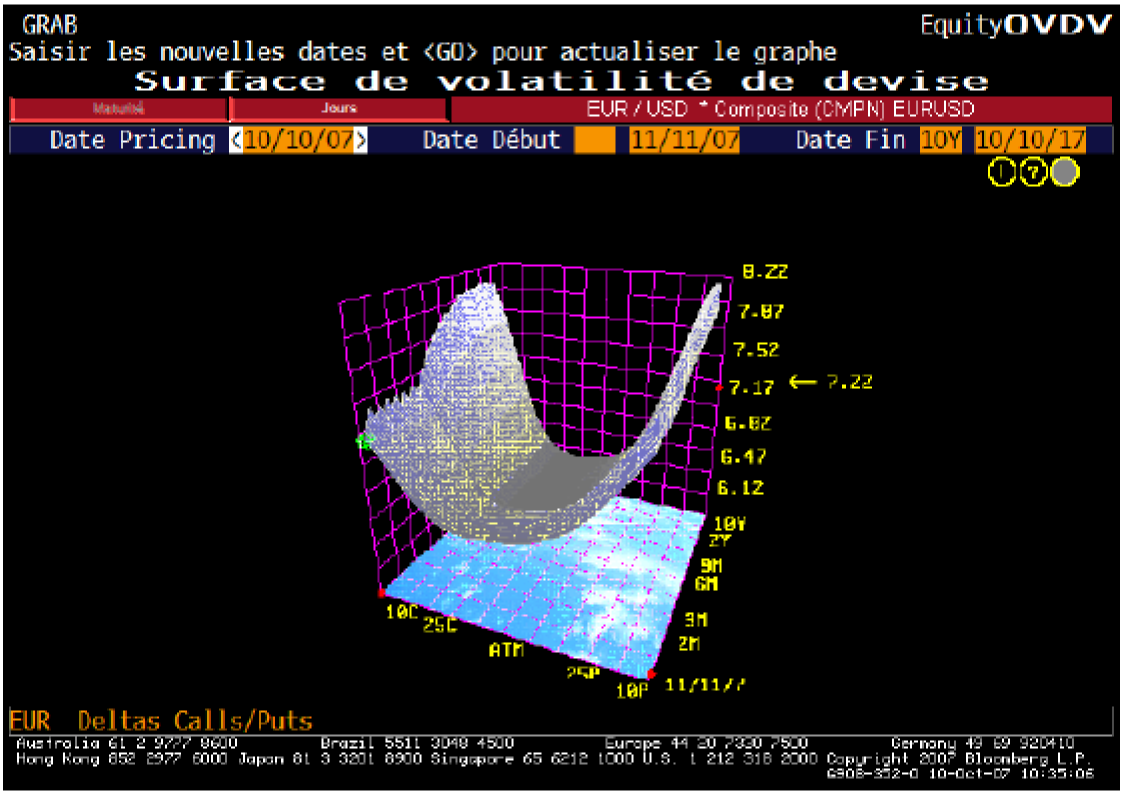
On peut observer que plus la maturité est grande, moins l'effet smile est important.
Le smile d'une option à 5 ans est quasiment horizontal.

En tenant compte de la volatilité en fonction du Strike et en fonction de la maturité des options, nous pouvons alors construire un graphique en 3 dimensions représentant « la surface de volatilité » ou encore « la map de volatilité ».

Graphique 15 : Surface de volatilité d'une option EUR/USD :



Graphique 16 : Surface de volatilité d'une option EUR/USD :



Source : « Bloomberg »

3- Comment former le smile de volatilité ?

Le smile de volatilité représente une anticipation de la volatilité implicite des traders.

Nous allons voir, comment, grâce aux données de marchés, nous pouvons reconstruire le smile de volatilité.

Pour ce faire, nous allons étudier à la notion de risk reversal et de strangle premium.

a- L'effet Risk Reversal :

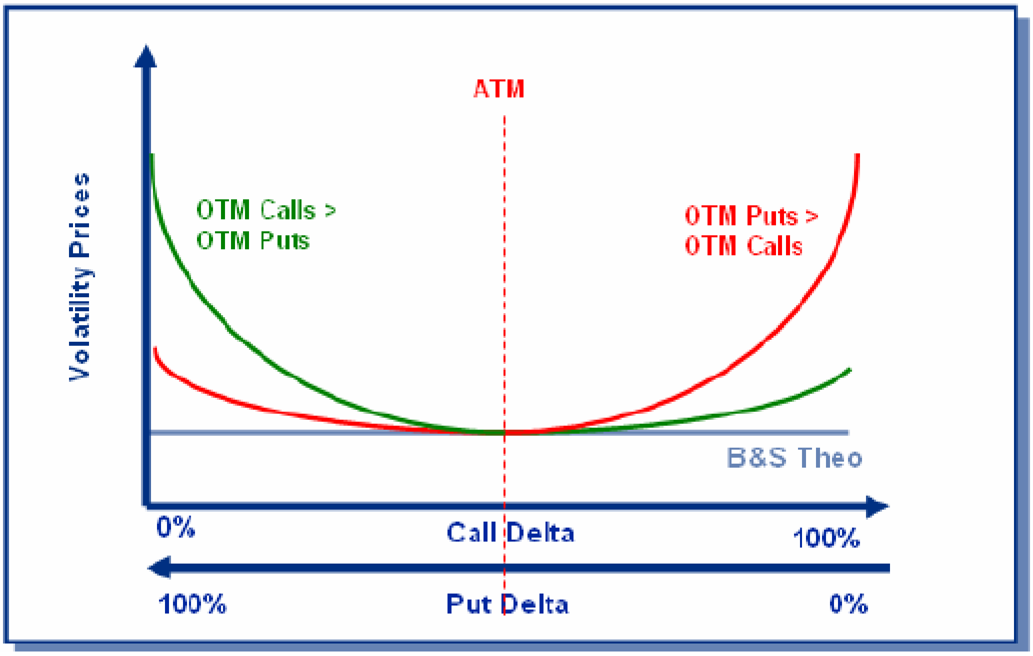
Un risk reversal est l'écart entre la volatilité implicite d'un call et d'un put de même delta (qui mesure la distance à la monnaie). Le Risk reversal 25 de delta et 10 de delta font référence sur les marchés. Il indique l'asymétrie des stratégies sur le marché des options de change pour une maturité donnée; si l'on se place dans le cas de l'EUR/USD à six mois, lorsque la volatilité implicite du call EUR est supérieure à celle du put EUR (le risque reversal est alors positif), cela signifie que les investisseurs sont plus nombreux à se couvrir contre une hausse de l'euro par rapport au dollar dans six mois que contre une baisse. On peut en déduire que le sentiment dominant est celui d'une appréciation de l'euro contre dollar à six mois.

Donc ;

$$\text{Risk Reversal}_{25\text{delta}} = \text{Call}_{25\text{delta}} - \text{Put}_{25\text{delta}}$$

$$\text{Risk Reversal}_{10\text{delta}} = \text{Call}_{10\text{delta}} - \text{Put}_{10\text{delta}}$$

Graphique 17 : Risk Reversal et smile de volatilité :



b- **L'effet Strangle :**

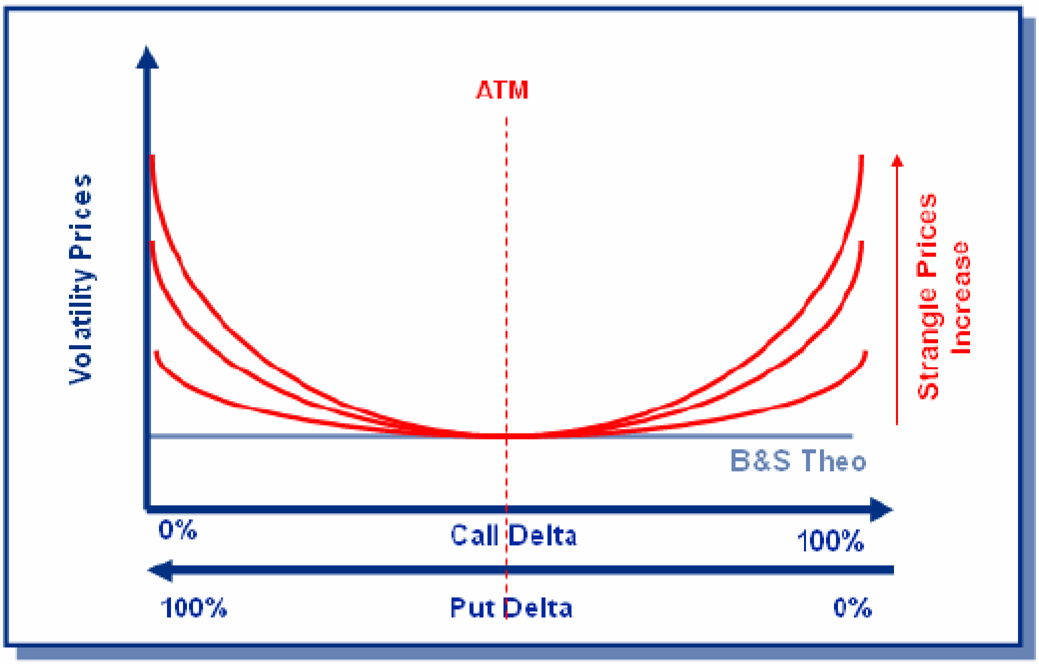
Le strangle premium permet de donner une indication sur la convexité du smile de volatilité. Il permet de mesurer la différence de volatilité entre les options à la monnaie et hors de la monnaie.

Comme pour les risk reversal, ce sont les options de delta 10 et 25 qui font références pour le strangle ;

$$Strangle_{25delta} = \frac{Call_{25delta} + Put_{25delta}}{2} - Vol_{ATM}$$

$$Strangle_{10delta} = \frac{Call_{10delta} + Put_{10delta}}{2} - Vol_{ATM}$$

Graphique 18 : Effet des strangles sur le smile de volatilité :



Sur ce graphique, on remarque que plus la différence de volatilité constatée par le strangle est élevée, plus la courbe devient convexe, avec des options OTM de plus en plus chères. En l'absence de risk reversal, si seul le strangle premium permettait de créer le smile de volatilité, ce dernier serait strictement symétrique par rapport à la volatilité ATM.

Essayons de mettre construire les smile de volatilité à trois mois.

Les informations nécessaires (strangle et risk reversal) nous sont fournies par le marché sous la forme du tableau ci-dessous :

Table 1: Informations sur le strangle et risk reversal :

Search Q EURVOL=ICAP

EURVOL=ICAP TFS-ICAP MONEY

Call +44 20 7375 2626. Please see <ICAPFXVOLDEF> for RR Flags

EUR DEAL

SW	FX Ops	6.25	/	7	EUR	LON	15:24
1M	FX Ops	6.6	/	6.85	EUR	LON	18:29
2M	FX Ops	6.35	/	6.6	EUR	LON	18:30
3M	FX Ops	6.4	/	6.65	EUR	LON	18:58
6M	FX Ops	6.25	/	6.45	EUR	LON	17:06
1Y	FX Ops	6.15	/	6.35	EUR	LON	18:12
1MBF10		0.6	/	0.9		LON	10:19
2MBF10		0.7	/	1		LON	10:19
3MBF10		0.75	/	1.05		LON	10:19
6MBF10		1.025	/	1.275		LON	10:19
1YBF10		1.175	/	1.425		LON	10:19
1MBF25		0.1	/	0.2		LON	10:19
2MBF25		0.15	/	0.25		LON	10:19
3MBF25		0.2	/	0.3		LON	10:19
6MBF25		0.25	/	0.35		LON	10:19
1YBF25		0.3	/	0.4		LON	10:19
1WRR10	P 1	0.35	/	1.35		LON	10:19
1MRR10	P 1	0.25	/	0.65		LON	10:19
2MRR10	P 1	0.25	/	0.65		LON	10:19
3MRR10	P 1	0.2	/	0.6		LON	10:19
6MRR10	P 1	0.25	/	0.6		LON	10:19
1YRR10	P 1	0.2	/	0.55		LON	10:19
1WRR25	P 1	0.1	/	0.85		LON	10:19
1MRR25	P 1	0.05	/	0.35		LON	18:08
2MRR25	P 1	0.1	/	0.4		LON	10:19
3MRR25	P 1	0.1	/	0.4		LON	10:19
6MRR25	P 1	0.1	/	0.35		LON	10:19
1YRR25	P 1	0.1	/	0.35		LON	10:19

Source : « Thomson Reuters»

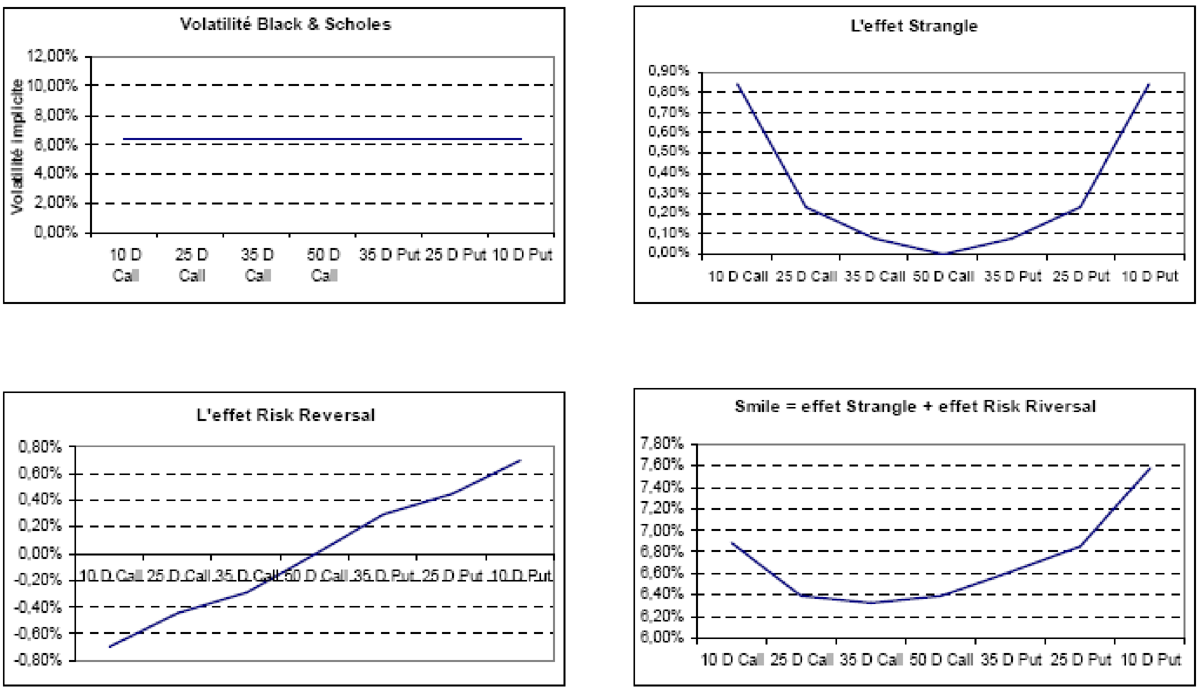
En reportant dans Excel les valeurs de la page ci-dessus, nous obtenons :

Table 2: Informations sur le strangle et risk reversal :

	BS	Strangle	RR	Total
10 D Call	6,39%	0,84%	-0,70%	6,88%
25 D Call	6,39%	0,23%	-0,45%	6,40%
35 D Call	6,39%	0,08%	-0,29%	6,33%
50 D Call	6,39%	0,00%	0,00%	6,39%
35 D Put	6,39%	0,08%	0,29%	6,62%
25 D Put	6,39%	0,23%	0,45%	6,85%
10 D Put	6,39%	0,84%	0,70%	7,58%

Afin de mieux comprendre la construction du smile, voici les différentes étapes expliqués sous forme de graphiques :

Graphique 19 : Construction du smile de volatilité :



Ici, on s'aperçoit que les risk reversal sont en faveur des Puts. Cela signifie que la volatilité des Puts OTM est supérieure à la volatilité des Call OTM.

III- La volatilité comme stratégie de trading et gestion de book d'option.

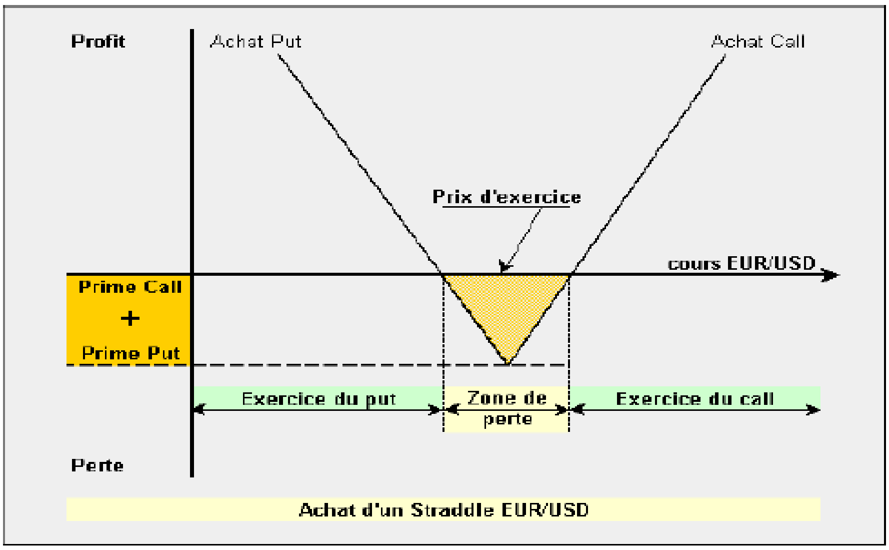
Le trading de volatilité est une des caractéristiques essentielles des marchés d'options : la volatilité est une mesure de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier.
En effet, pour de nombreux observateurs les marchés d'options sont avant tout des marchés où se confrontent l'offre et la demande de volatilité : les organismes financiers s'engagent dans l'achat ou la vente d'options misant principalement sur leur habilité à prévoir la volatilité future des actifs sous-jacents, tout en se couvrant contre les variations de prix.

Aujourd'hui, il existe de nombreuses stratégies permettant de « jouer » la volatilité.
Lorsqu'un trader souhaite être long Véga, c'est-à-dire lorsqu'il parie sur une forte volatilité du sous jacent, il peut choisir parmi les stratégies suivantes.

1- Le straddle :

Un Straddle est la combinaison d'un call et d'un put, de même Strike et de même échéance.
En contrepartie du paiement des deux primes, l'acheteur de ce montage profite à la fois de la hausse et de la baisse du cours de l'actif.
Cette stratégie s'adapte, ou bien à une importante variation du cours de l'actif sous-jacent à la hausse ou à la baisse, ou bien à une forte hausse de la volatilité implicite (véga).
A l'intérieur des bornes, la perte est égale à la somme des deux primes payées.

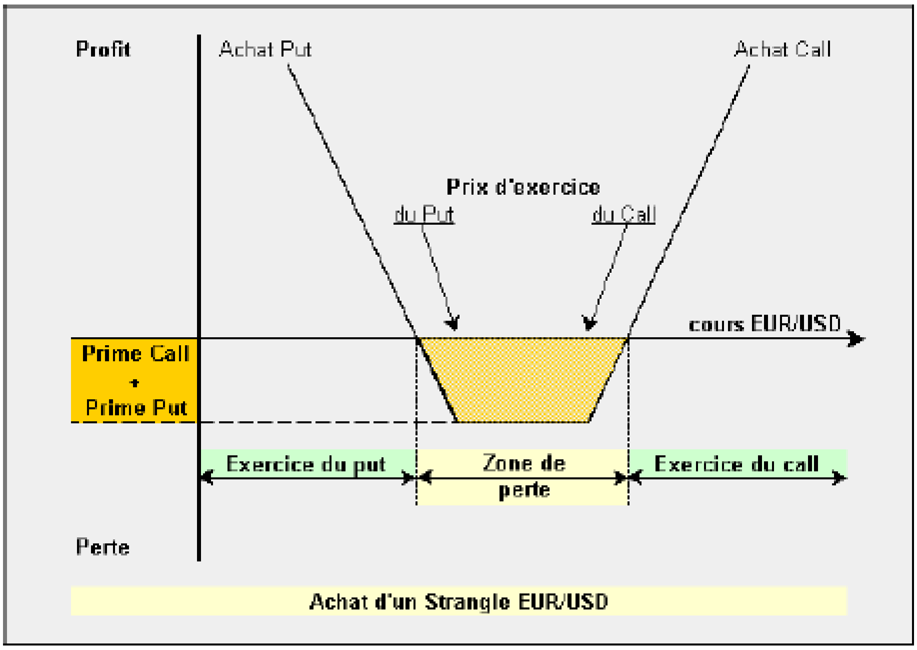
Graphique 20 : Achat d'un Straddle EUR/USD :



2- **Le strangle :**

Le Straddle étant stratégie assez chère. L'alternative est d'utiliser un Strangle.
Celui-ci écarte les prix d'exercice par rapport au Straddle.
Ainsi, dans le cas d'un achat de Strangle, le call et le put détenus ont des prix d'exercices différents, permettant d'une part, d'affiner les prises de positions, et d'autre pat, de réduire le coût de l'investissement global.
Pour cette stratégie, le gain est possible lorsque l'opérateur prévoit une forte variation de la volatilité dans un sens ou dans l'autre, amenant ainsi le cours du sous-jacent au-delà des prix d'exercices fixés.

Graphique 21 : Achat d'un Strangle EUR/USD :



3- Principe de gestion d'un book d'option :

Il serait très simpliste de penser que les stratégies citées ci-dessus sont achetées à une date t et que l'on ne fasse plus rien jusqu'à l'exercice.

Une fois ces stratégies mises en place, il faut suivre l'évolution du book.
Cela est possible grâce aux différentes sensibilités vu dans la première partie (les grecques).
Le but est d'expliquer, pratiquement, comment un trader gère ce type de stratégie dans son book.

Nous allons donc étudier dans cette partie, chaque indicateur de sensibilité adossé à cette stratégie.

Nous avons vu la formule du delta :

$$\boxed{\Delta = N(d_1) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}$$

Cette formule d'évaluation montre que le coefficient delta est lui-même une fonction du cours du sous-jacent, du temps et de la volatilité.
Ceci oblige le trader à ajuster constamment sa position.
Ainsi, pour annuler tout risque inhérent à l'évolution du cours de l'actif sous-jacent, il adoptera une stratégie « delta neutre » ou « delta hedged ».
Cependant, puisque le cours du sous-jacent fluctue, le delta varie constamment. Le trader doit procéder à des réajustements de son book en générant de nouvelles opérations.
Il faut donc une mesure pour pouvoir quantifier la fréquence des réajustements.
Intervient alors le gamma.

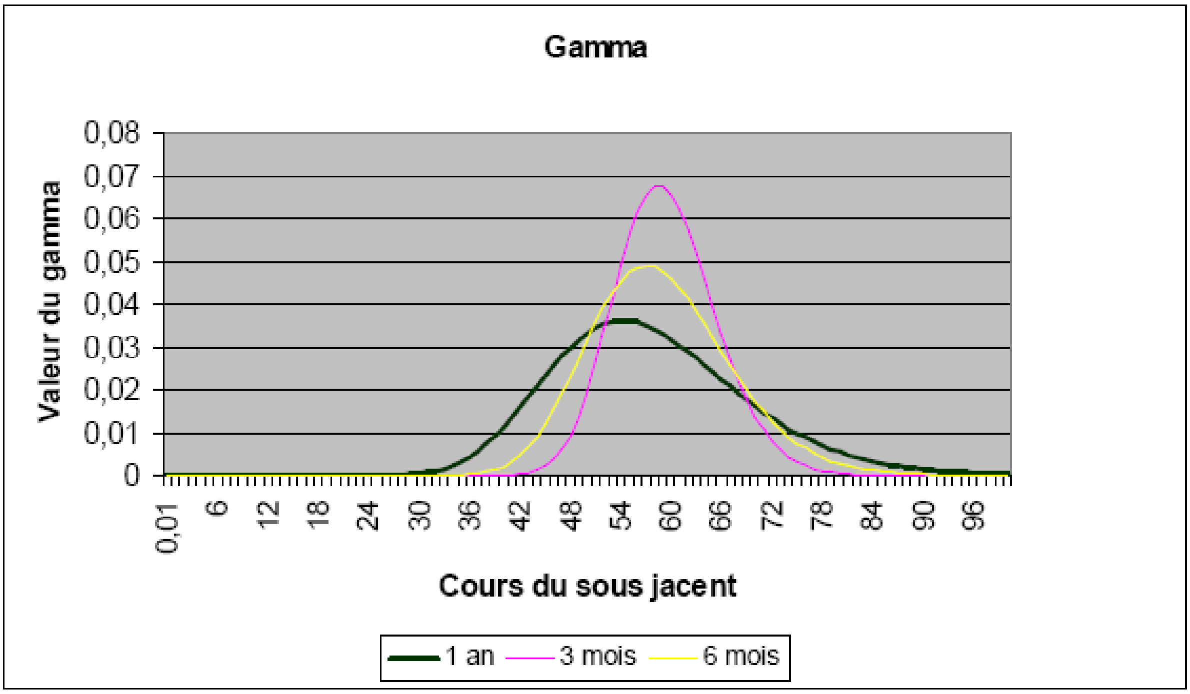
4- Couverture en delta neutre et gamma positif :

La stratégie de notre gestion de book était d'être delta neutre.
Nous étions Gamma positif.
Nous allons donc voir en quoi consiste notre gestion du book au quotidien.
Lorsque le gamma global du book est positif, la position est dites convexe. Dans ce cas, tout mouvement à la hausse du cours de l'actif sous-jacent accroît le delta et impose de vendre des contrats pour ajuster celui-ci. Inversement, tout mouvement à la baisse du cours diminue le delta et oblige à racheter des contrats.

Chaque correction du delta se traduit par un gain et toute variation du cours de l'actif est source d'amélioration. Le trader est dans le sens du marché. Cette gestion est relativement confortable tant que la volatilité permet de se réajuster.

La gestion en gamma positif s'avère particulièrement rentable, lorsque le cours du sous-jacent évolue dans un tunnel, l'ajustement du delta consistant alors en des achats et des ventes successifs.
Le choix de l'échéance et du prix d'exercice est primordial dans la gestion du gamma.
En effet, le gamma est d'autant plus important que l'option est à la monnaie.
Le choix du prix d'exercice ne le modifie cependant pas quand l'échéance des options est lointaine.
En revanche, quand les options arrivent à maturité, le gamma est très élevé si l'option est à la monnaie (le delta passe de 0 à +1 très rapidement).

Graphique 22 : Evolution du gamma en fonction du sous-jacent et de la maturité :



Par conséquent, c'est avec des options à la monnaie et arrivant à maturité que l'on agit le plus efficacement sur le gamma global du book. Ainsi, plus l'option est proche de l'échéance et à la monnaie, plus le delta devient sensible à la moindre fluctuation du cours du sous-jacent, c'est-à-dire source de profit dans le cas d'un book gamma positif.

Une position gamma positive bénéficie donc de tout mouvement de cours du sous-jacent alors que les mêmes mouvements conduiraient à des baisses de la valeur d'un portefeuille gamma- négatif. De ce fait en trading, l'avantage d'un portefeuille gamma-positif est évident. En gros, en matière de volatilité, si la volatilité augmente entre le moment où le trader achète et exerce son option il est gagnant.

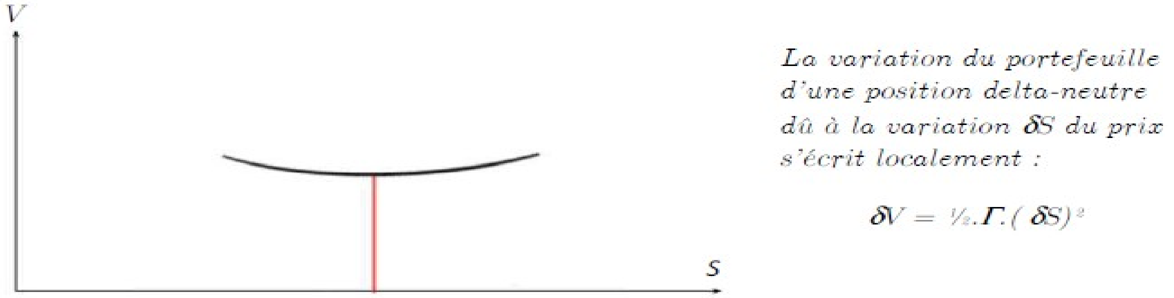
Cependant, cette analyse n'a de sens que localement. La position n'est assimilable à une parabole qu'aux environs du prix auquel la couverture delta-neutre a été traitée. Il ne faut pas oublier que tout le challenge consiste à gérer son Thêta et son Gamma qui sont toujours de signes opposés.

5- Gestion du Thêta et du Gamma :

En position gamma positive, acheter une option est équivalent à acheter de la volatilité, donc on a intérêt à ce que la volatilité future soit la plus forte possible pour le call.
Dans ce cas, le fait de gérer des options en utilisant le gamma est un pari sur la différence entre la volatilité initiale, et la volatilité future.

Cependant comme évoqué précédemment, le fait d'avoir un d'avoir un Γ positif est modéré par le fait d'avoir un Θ négatif, et de plus, cette petite analyse n'a de sens que de manière locale.
La parabole n'est une modélisation qu'au voisinage du prix pour laquelle on a fait une couverture delta-neutre, et en général non symétrique.

Graphique 23 : variation d'un portefeuille de position delta-neutre :



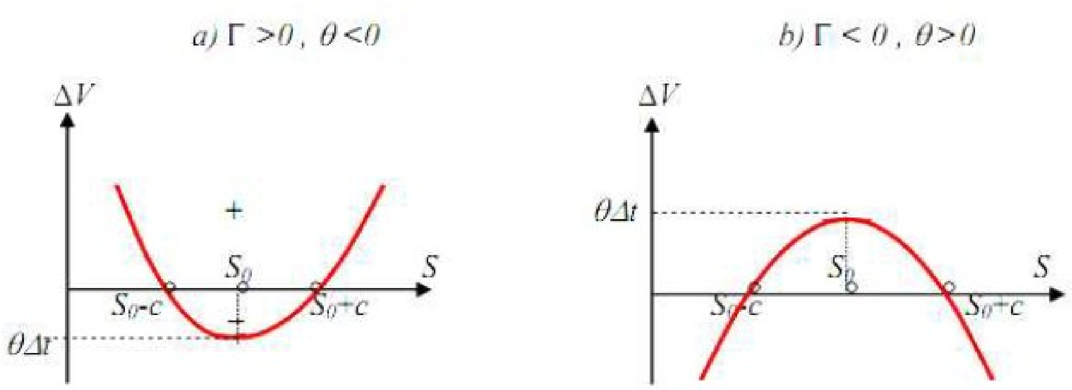
V(S) est donc localement une parabole dont l'extrémum correspond au cours S pour lequel $\Delta = 0$.

Nous allons désormais considérer un intervalle de temps $(t, t+\Delta t)$

Nous allons analyser le résultat d'une position en prenant en compte le temps et l'impact du Θ sur le portefeuille.

Graphique 24 : Impact du thêta sur une position delta-neutre gamma positif/négatif :

$$\Delta V = \tfrac{1}{2}.\Gamma.(\delta S)^2 + \Theta.\Delta t$$



Pendant Δt, deux phénomènes se compensent : Θ fait baisser le portefeuille (on suppose qu'on a $\Gamma>0$), tandis qu'une variation de S l'augmente. On a donc une variation $\delta S = c$ du cours de l'action qui compense exactement la dépréciation de l'option par le temps.

On remarque que le saut minimal de S, dépend linéairement de σ. Plus la volatilité est importante plus on a de chance (pour un call) d'être gagnant avec cette stratégie.

L'art du trader est donc de jouer avec un ensemble de paramètres qui dégagent des tendances ou sensibilités plutôt à court terme afin de dégager un profit. Nous venons de voir succinctement un exemple où on pouvait faire du trading de volatilité.

Nous allons rapidement montrer que l'analyse n'est pas tout à fait symétrique selon qu'on travailler sur les puts et les calls. Si on prend un call et un put, dont le sous-jacent vaut 500, de strike 520 et de maturité 90 jours. Le taux d'intérêt est de 9,5 % et la volatilité est estimée à 5,5 % en hebdomadaire.

On a : T-t = 90/365 = 0,2465753 ; σ = 0,055. $\sqrt{(52)}$=0,4 ; r = 0,09075 ; d1 = 0,0145127 ; d2 =- 0,1841101 ; N(d1) = 0,50579056 ; N(d2) = 0,42696356 ; D'où C = 500 N(d1) – K.exp(-r(T-t)). N(d2) = 36 Et P = C-S+ K.exp(-r(T-t)) = 44

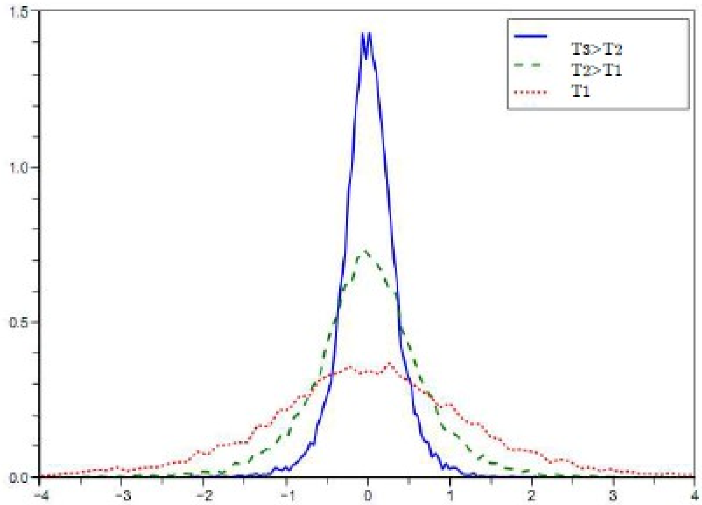
Le delta du call est égal à N(d1) = 0,506, celui du put à -0,427 : l''élasticité du call (Δ.S/C) est à 7 et celle du put à -5,6 ; le call est 7 fois plus sensible et le put 5,6 fois plus sensible que le sous-jacent.
En règle générale les options sont plus sensibles que leur sous-jacents, et il n'y a pas de symétrie Put-Call.
Nous voyons bien que le modèle de Black-Scholes a certaines limites.

6- L'erreur de couverture :

L’erreur de couverture est proportionnelle à la racine du pas de temps que l’on note 1/n.

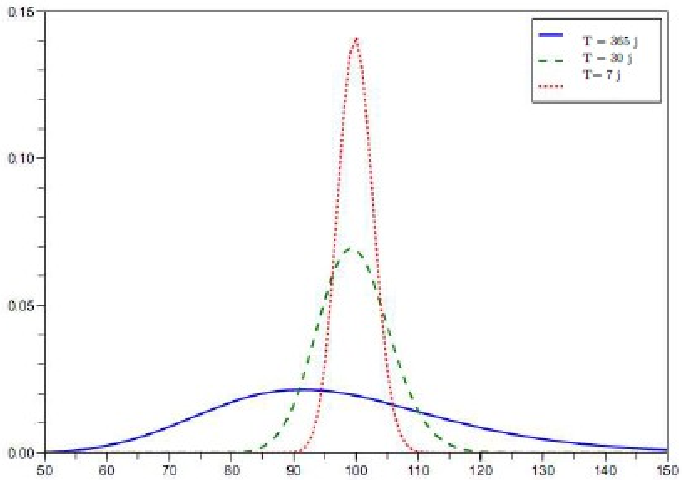
Ainsi, pour diviser l’erreur par 2 il faut donc réactualiser le portefeuille 4 fois plus souvent.

<u>Graphique 25 : Gamma d’un call pour des maturités différentes :</u>



Gamma d’un call option call pour des maturités différentes.

<u>Graphique 26 : Erreur de couverture pour différents pas de réactualisation :</u>



Histogrammes de l’erreur de couverture pour différents pas de réactualisation.

- L’erreur de couverture est centrée et indépendante du facteur haussier ou non de l’action

- L'erreur de couverture est d'autant plus grande que la réactualisation est faible
- Le Gamma est plus étroit et plus important pour des maturités plus importantes, c'est-à-dire proches du temps d'exercice : il est plus difficile de se couvrir juste avant l'échéance surtout au voisinage du strike.

CONCLUSION :

Le smile de volatilité est une donnée fondamentale pour les opérateurs de marché.

En effet, le fait que la formule de Black et Scholes et de ses extensions (Garman & Kohlhagen) se base sur des éléments théoriques, sans tenir compte d'éléments inhérents à la réalité (non log-normalité, sauts de volatilité), entraine des différences entre les résultats empiriques et théoriques.

Ces évènement de fortes variations du cours du sous-jacent ne sont pas si rares.
Nous en avons eu à nouveau la preuve avec la crise des subprimes qui a boulversé les marchés en 2007 et qui continu à les affecter avec la crise de liquidité et de solvabilité (2007 -2011).

Le smile a donc pour rôle d'ajuster la formule aux éléments réellement observés sur les marchés.

Aujourd'hui, le modèle Black & Scholes est encore largement utilisé et aucun modèles ne semblent pour l'instant en mesure de le remplacer.

Nous voyons cependant de nombreuses tentatives afin de palier à ces limites et notamment à travers la mise en place de nouveaux modèles utilisant des volatilités stochastiques comme le modèle de GARCH par exemple.
De nos jours, nombreuses sont les critiques sur le modèle de Black & Scholes.
Le mathématicien Benoît Mandelbrot considère que la formule de Black-Scholes est déconnectée de la réalité des marchés financiers, et qu'elle a été maintes fois remises en cause lors, notamment, des différents krachs boursiers. (du fait que ces théories sont fondées sur la distribution normale qui sous-estiment très fortement les événements "improbables" comme les krachs).
Selon Nassim Nicholas Taleb, philosophe du hasard, praticien en mathématiques financières et ancien trader, la formule de Black-Scholes sont mathématiquement cohérentes, très facile à utiliser mais reposent sur des hypothèses qui simplifient à outrance la réalité au point de s'en éloigner complètement, (théorie du Black Swan). M.Taleb remet en cause l'utilisation de la loi normale en finance. Selon Nicholas Taleb, les prévisions fondées sur cette théorie n'ont aucune validité et peuvent souvent se révéler néfastes. Il conseille d'ailleurs la stratégie du « positive black swan », qui consiste par exemple à acheter des options very deep out qui ne coûtent pas cher pour se protéger positivement en cas d'événements extrêmes (krachs, tsunami…), car ils ne sont pas pris en compte au niveau des queues de la loi normale.

BIBLIOGRAPHIE :

• Options, futures et autres actifs dérivés, J. HULL, 6ème édition. (p.221 – 237) (p. 287 – 408)

- Finance de Marché, Roland Portrait – Patrice Poncet 2ème édition (p.319 – 403)

- Monnaie, banque et marchés financiers, Frederic Mishkin 9éme édition (p. 209 -214)

- Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, D.Lamberton, B.Lapeyre (p.69-102)

- Les options exotiques Concept et Applications, Jacques Boissonnade

- **The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable, Nassim Nicholas Taleb (p.229-234)**

- <u>Sites internets :</u>

  - Wikipédia; www. wikipedia.org
  - www.cambiste.info
  - *www.mataf.net*
  - www.investopedia.com
  - www.strategies-options.com

<u>ANNEXES :</u>

<u>Annexe 1:</u> Programme Visual Basic du smile de volatilité en deux dimensions

Function impvolcall0(c As Double, X As Double, t As Double, S0 As Double, r As Double, erreur As Double)

```
volatilite = 0.2
dv = erreur + 1

While Abs(dv) > erreur
d1 = Log(S0 / X) + (r + 0.5 * Volatilite ^ 2) * t
d1 = d1 / (Volatilite * Sqr(t))
d2 = d1 - Volatilite * Sqr(t)
erreurprix = S0 * Application.NormSDist(d1) - X * Exp(-r * t) * Application.NormSDist(d2) - c
vega = S0 * Sqr(t / 3.1415926 / 2) * Exp(-0.5 * d1 ^ 2)
dv = erreurprix / Vega
volatilite = volatilite - dv
Wend
impvolcall0 = volatilite
```

End Function

Dans ce programme, nous avons utilisé la fonction Excel : Application.NormSDist(d1) afin d'utiliser la fonction de répartition de la loi normale.

Annexe 2 : Code VBA pour une simulation du prix d'une option par Monte-Carlo et Black & Scholes

```
'****************************************************************************
'*                Cumulative Standard Normal Distribution                  *
'*   (This function provides similar result as NORMSDIST( ) on Excel)       *
'****************************************************************************
Function DevNorm(z)
   Pi = 3.14159265358979
   DevNorm = (1 / ((2 * Pi) ^ 0.5)) * Exp(-0.5 * z * z)
End Function

Function SNorm(z)
   c1 = 2.506628
   c2 = 0.3193815
   c3 = -0.3565638
   c4 = 1.7814779
   c5 = -1.821256
   c6 = 1.3302744
   If z > 0 Or z = 0 Then
          w = 1
   Else: w = -1
   End If
   y = 1 / (1 + 0.2316419 * w * z)
   SNorm = 0.5 + w * (0.5 - (Exp(-z * z / 2) / c1) * _
         (y * (c2 + y * (c3 + y * (c4 + y * (c5 + y * c6))))))
End Function

Function MoroNormSInv(probx As Double) As Double
'   Replaces Excel's function NormSInv
   Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9
   Dim y As Double, y2 As Double, p As Double
   Dim a As Variant, b As Variant
   a = Array(2.50662823884, -18.61500062529, 41.39119773534, -25.44106049637)
   b = Array(-8.4735109309, 23.08336743743, -21.06224101826, 3.13082909833)
   c1 = 0.337475482272615
   c2 = 0.976169019091719
   c3 = 0.160797971491821
   c4 = 2.76438810333863E-02
   c5 = 3.8405729373609E-03
   c6 = 3.951896511919E-04
   c7 = 3.21767881768E-05
   c8 = 2.888167364E-07
```

```
    c9 = 3.960315187E-07
    y = probx - 0.5
    If Abs(y) < 0.42 Then
        p = y ^ 2
        p = y * (((a(3) * p + a(2)) * p + a(1)) * p + a(0)) / ((((b(3) * p + b(2)) * p + b(1)) * p + b(0)) * p + 1)

    Else
        If y > 0 Then p = Log(-Log(1 - probx))
        If y <= 0 Then p = Log(-Log(probx))
        p = c1 + p * (c2 + p * (c3 + p * (c4 + p * (c5 + p * (c6 + p * (c7 + p * (c8 + p * c9)))))))
        If y <= 0 Then p = -p
    End If
    MoroNormSInv = p
End Function


'*********************************************************************
'*           Black-Scholes European Call Price Computation           *
'*********************************************************************

Public Function Call_Eur(S, K, t, r, d, sigma, parite) As Variant()
    Dim MonTab(0 To 5) As Variant
    Dim a As Single
    Dim b As Single
    Dim c As Single
    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

    a = Log(S / K)
    b = (r - d + 0.5 * sigma ^ 2) * t
    c = sigma * (t ^ 0.5)
    d1 = (a + b) / c
    d2 = d1 - sigma * (t ^ 0.5)
    MonTab(0) = (S * Exp(-d * t) * SNorm(d1) - K * Exp(-r * t) * SNorm(d2)) / parite
    MonTab(1) = SNorm(d1) * Exp(-d * t)
    MonTab(2) = DevNorm(d1) * Exp(-d * t) / (S * sigma * (t ^ 0.5))
    MonTab(3) = -(S * sigma * DevNorm(d1) * Exp(-d * t)) / (2 * (t ^ 0.5)) - r * K * Exp(-r * t) * SNorm(d2) - d
* S * Exp(-d * t) * SNorm(d1)
    MonTab(4) = S * Exp(-d * t) * (t ^ 0.5) * DevNorm(d1)
    MonTab(5) = K * t * Exp(-r * t) * SNorm(d2)
```

```
   Call_Eur = MonTab

End Function


'********************************************************************
'*          Black-Scholes European Call Price Computation          *
'********************************************************************

Public Function Call_Eur(S, K, t, r, d, sigma, parite) As Variant()
   Dim MonTab(0 To 5) As Variant
   Dim a As Single
   Dim b As Single
   Dim c As Single
   Dim d1 As Single
   Dim d2 As Single

   a = Log(S / K)
   b = (r - d + 0.5 * sigma ^ 2) * t
   c = sigma * (t ^ 0.5)
   d1 = (a + b) / c
   d2 = d1 - sigma * (t ^ 0.5)
   MonTab(0) = (S * Exp(-d * t) * SNorm(d1) - K * Exp(-r * t) * SNorm(d2)) / parite
   MonTab(1) = SNorm(d1) * Exp(-d * t)
   MonTab(2) = DevNorm(d1) * Exp(-d * t) / (S * sigma * (t ^ 0.5))
   MonTab(3) = -(S * sigma * DevNorm(d1) * Exp(-d * t)) / (2 * (t ^ 0.5)) - r * K * Exp(-r * t) * SNorm(d2) - d
* S * Exp(-d * t) * SNorm(d1)
   MonTab(4) = S * Exp(-d * t) * (t ^ 0.5) * DevNorm(d1)
   MonTab(5) = K * t * Exp(-r * t) * SNorm(d2)
   Call_Eur = MonTab

End Function




'********************************************************************
'*          Black-Scholes European Put Price Computation          *
'********************************************************************
```

```
Public Function Put_Eur(S, K, t, r, d, sigma, parite) As Variant()
    Dim MonTab(0 To 5) As Variant
    Dim a As Single
    Dim b As Single
    Dim c As Single
    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

    a = Log(S / K)
    b = (r - d + 0.5 * sigma ^ 2) * t
    c = sigma * (t ^ 0.5)
    d1 = (a + b) / c
    d2 = d1 - sigma * (t ^ 0.5)
    MonTab(0) = (-S * Exp(-d * t) * SNorm(-d1) + K * Exp(-r * t) * SNorm(-d2)) / parite
    MonTab(1) = SNorm(d1) * Exp(-d * t) - 1
    MonTab(2) = DevNorm(d1) * Exp(-d * t) / (S * sigma * (t ^ 0.5))
    MonTab(3) = -(S * sigma * DevNorm(d1) * Exp(-d * t)) / (2 * (t ^ 0.5)) + r * K * Exp(-r * t) * SNorm(d2) - d
* S * Exp(-d * t) * SNorm(d1)
    MonTab(4) = S * Exp(-d * t) * (t ^ 0.5) * DevNorm(d1)
    MonTab(5) = -K * t * Exp(-r * t) * SNorm(d2)
    Put_Eur = MonTab

End Function


'**********************************************************************
'*          Monte Carlo Call Europeen                     *
'**********************************************************************
Sub MC_Call_Eur(qmcC As Double, qmcP As Double, MC_Call_Eur As Double, MC_Put_Eur As Double, S As
Double, K As Double, t As Double, r As Double, d As Double, sigma As Double, parite As Double, simulations
As Long, pas_qmc As Long)
    Dim r_ As Double
    Dim c As Double
    Dim a As Double
    Dim sd As Double
    Dim somme_c As Double
    Dim somme_p As Double
    Dim sommeC As Double
    Dim sommeP As Double
    Dim pos As Double
```

```
    Dim S_T As Double
    Dim n As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Integer

r_ = (r - d - 0.5 * sigma * sigma) * t
sd = sigma * (t ^ 0.5)
For n = 1 To simulations
        Call Marsaglia(c)
        S_T = S * Exp(r_ + sd * c)
        pos = S_T - K
        If pos > 0 Then
           sommeC = sommeC + pos
        Else
           sommeP = sommeP - pos
     End If
Next n
MC_Call_Eur = Exp(-r * t) * (sommeC / simulations) / (parite)
MC_Put_Eur = Exp(-r * t) * (sommeP / simulations) / (parite)

For i = 1 To pas_qmc
    a = MoroNormSInv((2 * i - 1) / (2 * pas_qmc))
    If S * Exp(r_ + sd * a) - K > 0 Then
        somme_c = somme_c + S * Exp(r_ + sd * a) - K
    Else
        somme_p = somme_p - (S * Exp(r_ + sd * a) - K)
    End If
Next i
 'qmc = Application.WorksheetFunction.NormSInv(3 / 8)

qmcC = Exp(-r * t) / (pas_qmc * parite) * somme_c
qmcP = Exp(-r * t) / (pas_qmc * parite) * somme_p

End Sub
```

Annexe 3: Surface de volatilité et prix du call par rapport à sigma et inversement sous Scilab

Ce programme trace une courbe en 3 dimensions de la volatilité implicite d'une action suivant le prix et le temps restant avant la maturité.

Connaissant la fonction donnant le prix d'une option en fonction de sa volatilité et de l'échéance, nous inversons cette fonction pour connaitre la volatilité, par dichotomie.

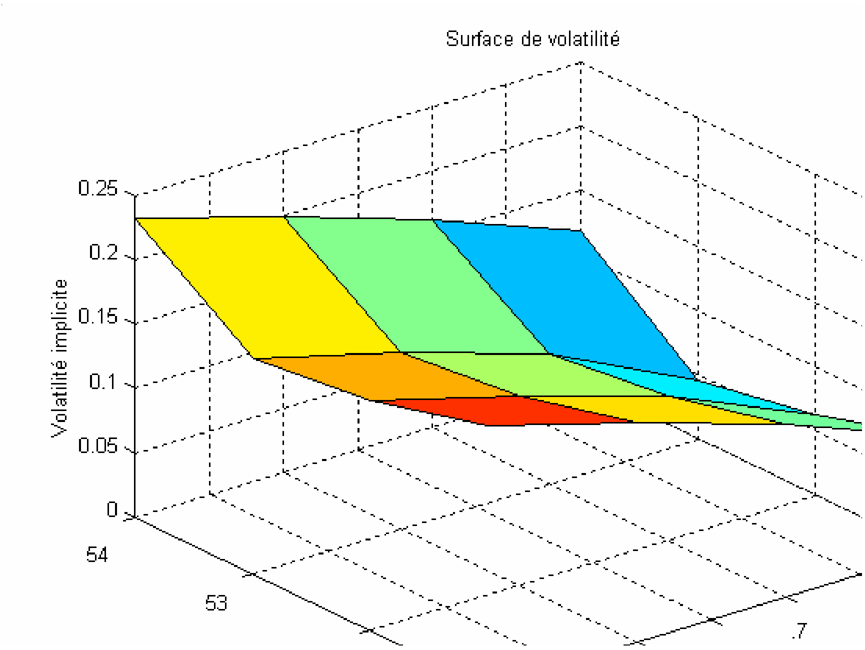
Effectivement, le prix est une fonction croissante de la volatilité. Il l'est aussi en fonction de l'échéance.

```
function [res] = courbe_sigma(K, r, So)

// sigma en fonction du prix et du temps
// on inverse juste la derniere ligne ! y = f(x) dans la fonction du dessus. ici x = f-1(y)
sigma = zeros(200, 100);
for p = 1:200
for t = 1:100
sigma(p, t) = inverser_bs(t/100, K, r, So, p/2);
end
end
plot3d((1:200)/2, (1:100)/100, sigma);
res = sigma;
endfunction

// fonction inversion
function [res]= inverser_bs(gT, K, r, So, p)
// sigma en fonction du prix
a = 0;
b = 10;
while ((b - a) > .001)
sigma = (a+b) / 2;
p_trouv = prix(gT, K, r, So, sigma);
if (p_trouv < p) then
a = sigma;
else
b = sigma
end
end
res = sigma;
endfunction

// FONCTIONS BASIQUES
function [res] = prix(gT, K, r, So, sigma)
d1 = (log(So/K)+r*gT)/(sigma*sqrt(gT)) + 1/2*sigma*sqrt(gT);
d2 = d1 - sigma * sqrt(gT);
res = So * phi(d1) - K * exp(-r * gT) * phi(d2);
50
endfunction
function [res] = phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t²/2)/ sqr(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction
```


Surface de volatilité
Volatilité implicite
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
54
53
.7